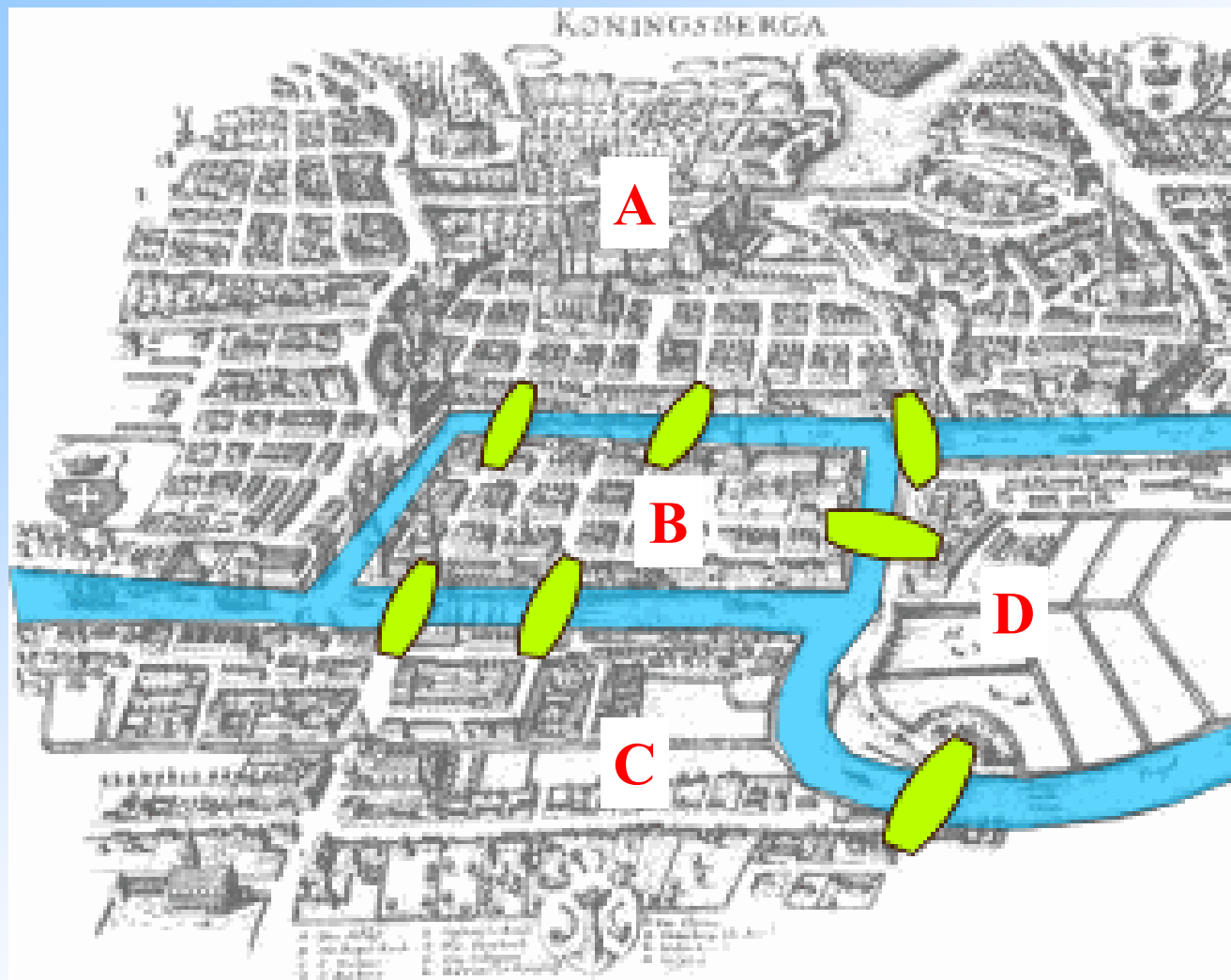
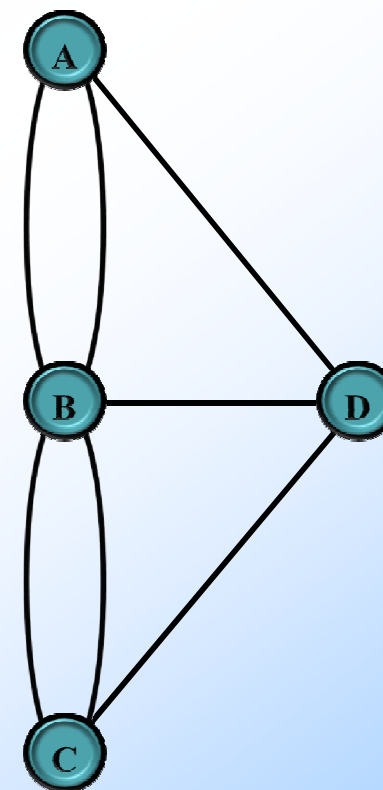




A königsbergi hidak problémája.



Hogyan tudnánk egy sétát tenni a belvárosban a Pregel folyó két partján, két szigetén, valamint 7 hídján keresztül úgy, hogy minden hídon pontosan egyszer kelünk át, és végül visszaérünk a kiindulási pontba.

Def

Ha egy G gráfban van olyan Z élsorozat (vagy zárt vonal), amelyik G minden élét pontosan egyszer tartalmazza, akkor G -t **Euler-gráfnak**, Z -t pedig **Euler-vonal-nak (Euler-körnek)** nevezzük.

Ész

- (i) Ha $v \neq v'$ (nyílt), akkor v és v' fokszáma páratlan,
és v, v' kivételével minden foksám páros.
- (ii) Ha $v = v'$ (zárt), akkor minden foksám páros, mivel
az Euler-vonal minden pontba ugyanannyiszor „megy be” és „ki”.
- (iii) A königsbergi hidak problémájának megoldása: lehetetlen.

Tétel (Euler-gráfok)

Ha G összefüggő véges gráf, akkor a következő állítások ekvivalensek:

- (1) G Euler-gráf.
- (2) $d(v)$ páros minden $v \in V(G)$ -re.
- (3) G éldiszjunkt körök egyesítése.

Biz

(1) $\Rightarrow$ (2) Láttuk Ész(ii)-ben.



(2) $\Rightarrow$ (3) Tfh minden csúcs foka páros

$\Rightarrow$ létezik K_1 kör G -ben (biz. gyakorlaton)

Tekintsük most a $G \setminus K_1$ gráfot: minden csúcs foka páros, vagy izolált.

Hasonló módon kiválasztható K_2 kör, ami éldiszjunkt K_1 -gyel, mivel K_1 törlésével töröltük az esetleges közös éleket is.

...

Végül csak izolált csúcsok maradnak

$\Rightarrow G$ éldiszjunkt körök egyesítése.



(3) $\Rightarrow$ (1)

Tfh G éldiszjunkt körök egyesítése.

Ha $G = K_1$, akkor készen vagyunk, egyébként

összefüggőség miatt kell léteznie egy K_i körnek, amelynek

K_1 -gyel van közös pontja. Legyen ez x .

x -en keresztül be tudjuk járni $K_1 \cup K_i$ -t úgy, hogy

minden élet pontosan egyszer érintünk.

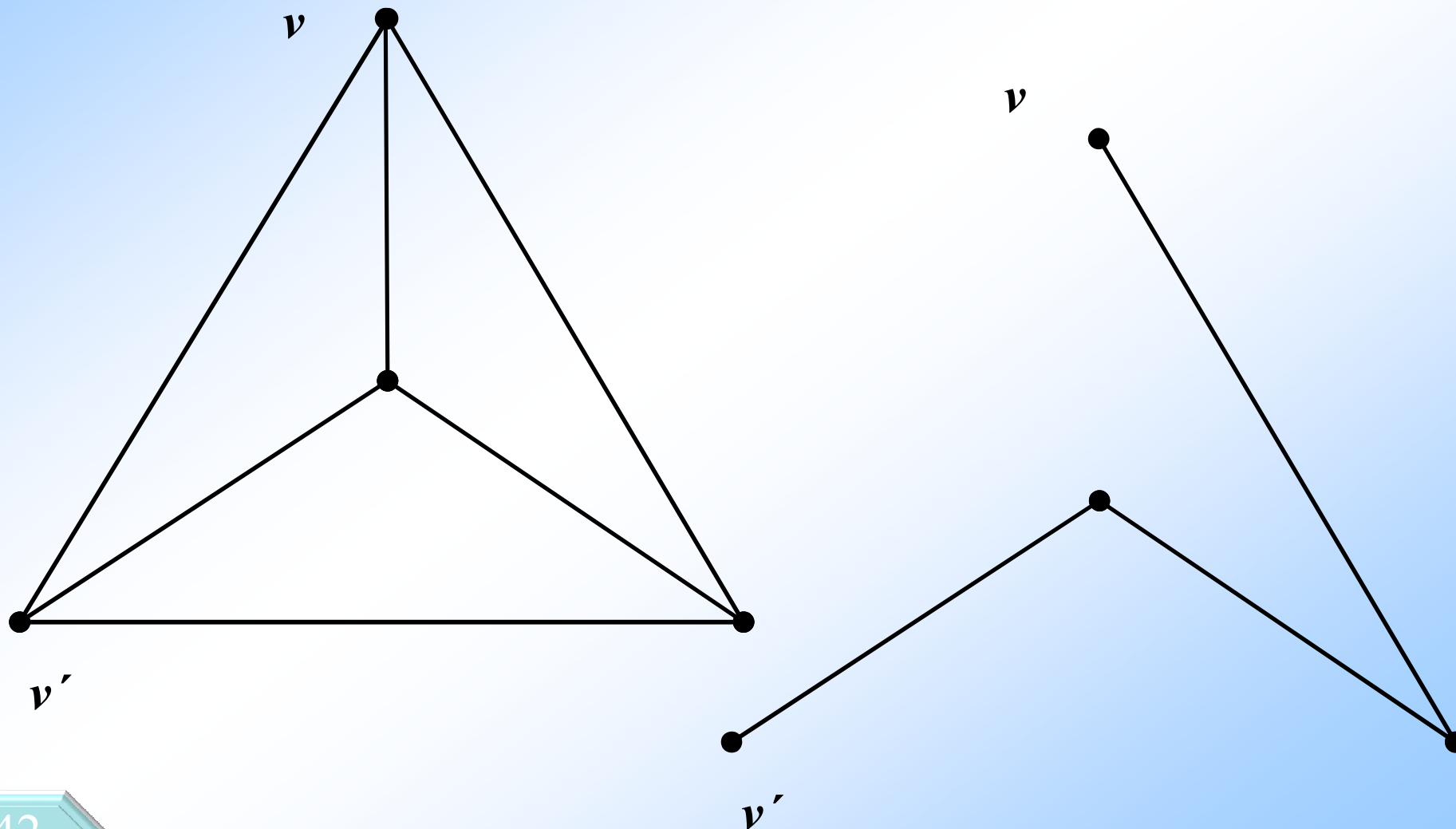
$\Rightarrow$ Euler - vonal.

Addig bővítjük, míg minden kört fel nem használtunk.



Lemma

Ha G $2s$ páratlan fokú csúcsot tartalmaz ($s \in \mathbb{N}^+$), akkor G s darab páronként éldiszjunkt nyílt vonal egyesítése.



Def

Egy út **Hamilton-út**, ha G gráf minden pontját tartalmazza.

Ha egy kör a G minden pontját tartalmazza, akkor **Hamilton-körnek**,
 G -t pedig **Hamilton-gráfnak** nevezzük.

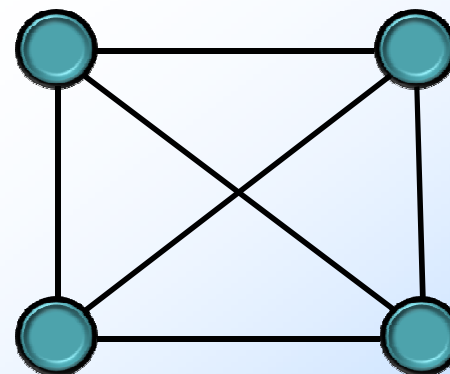
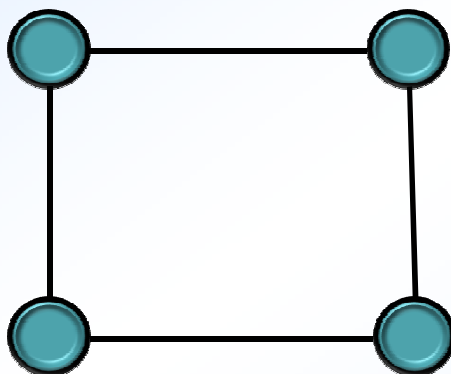
Ész

K_n ($n > 2$) Hamilton-gráf, ha n páratlan, akkor Euler-gráf is.

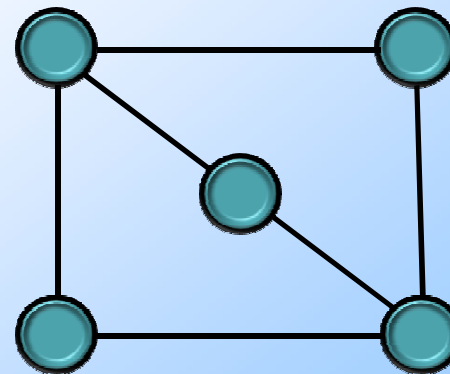
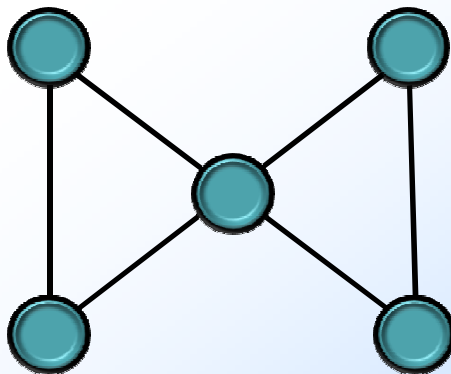
Euler

Nem Euler

Hamilton



Nem Hamilton



Tétel (Ore tétel)

Legyen G egy $n \geq 3$ pontú egyszerű véges gráf. Ha

$$d(v) + d(w) \geq n$$

minden v, w nem-szomszédos pontra, akkor G Hamilton-gráf.

Biz

TFH (indirekt) a feltételek fennállnak, de G nem Hamilton-gráf.

G részgráfja K_n -nek, amely Hamilton-gráf.

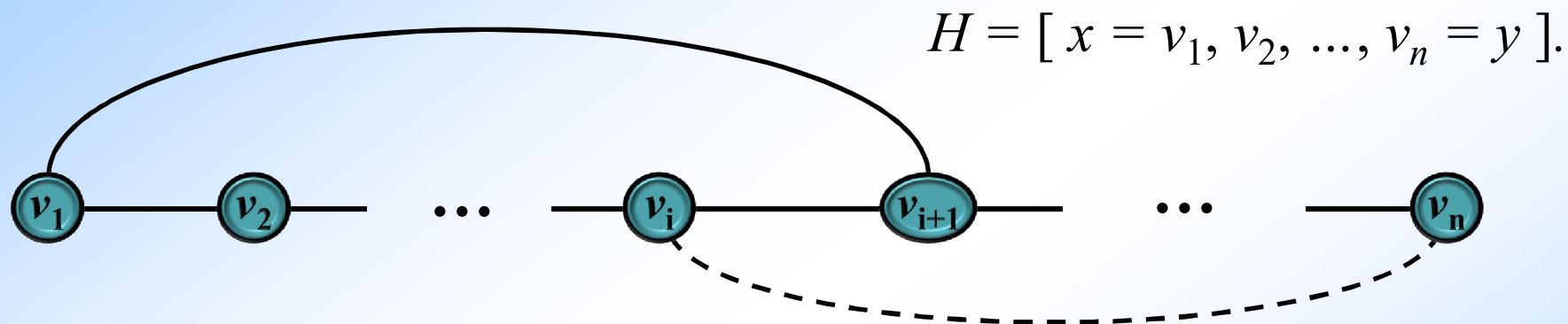
$\Rightarrow \exists$ egy G' , supergráfja G -nek és részgráfja K_n -nek úgy, hogy

G' nem Hamilton-gráf, de egy élet hozzáadva Hamilton-gráfot kapunk

Legyen x, y két tetszőleges nem-szomszédos csúcs G' -ben.

G' -höz adva egy x, y végpontú élet, Hamilton-kört kapunk.

$\Rightarrow G'$ tartalmazni fogja a következő Hamilton-utat:



Ha $x = v_1$ szomszédos v_{i+1} , akkor $y = v_n$ és v_i nem szomszédos, mert így

$$[x = v_1, v_2, \dots, v_i, v_n = y, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_1 = x]$$

Hamilton-kör lenne G' -ben.

Mivel x -nek $d(x)$ szomszédja van, y -nak $d(y)$ csúcs nem lehet szomszédja.

$$\Rightarrow d(y) \leq n - 1 - d(x),$$

$$\Rightarrow d(y) + d(x) \leq n - 1.$$



Tétel (Dirac tétel)

Legyen G egy $n \geq 3$ pontú egyszerű véges gráf. Ha

$$d(v) \geq n/2$$

minden v csúcsra, akkor G Hamilton-gráf.

Biz

$$d(v) \geq n/2 \text{ minden csúcsra}$$

$$\Rightarrow d(v) + d(w) \geq n/2 + n/2 = n.$$

Tétel (Ore tétel) $\Rightarrow$

G Hamilton-gráf.



Def

Legyen $G = (V, E, \varphi, w)$ olyan gráf, ahol w függvény egy $e \in E(G)$ élhez rendel valós számhalmazbeli értéket, amelyet e **súlyának** nevezzük. $X \subseteq E(G)$ esetén az X részhalmaz súlya: $\sum_{e \in X} w(e)$.

Def

Egy **mohó algoritmus** minden döntést az adott pillanatban rendelkezésre álló információk alapján hoz meg, nem törődve a döntés „jövőre” gyakorolt hatásával.

Ész

Előny: (i) könnyen kitalálható,
(ii) könnyen implementálható,
(iii) sok esetben nagyon gyors és hatékony.

Hátrány: nem mindig adja az optimális megoldást.

Ellenpélda

TSP (utazóügynök probléma). Egy utazóügynöknek n városba kell ellátogatnia. Szeretné az útiköltséget minimalizálni úgy, hogy minden várost pontosan egyszer érintsen.

Fogalmazzuk meg a gráfelméleti modellt!

Tehát, az n városnak megfeleltetünk n csúcsot.

Két pont akkor szomszédos, ha

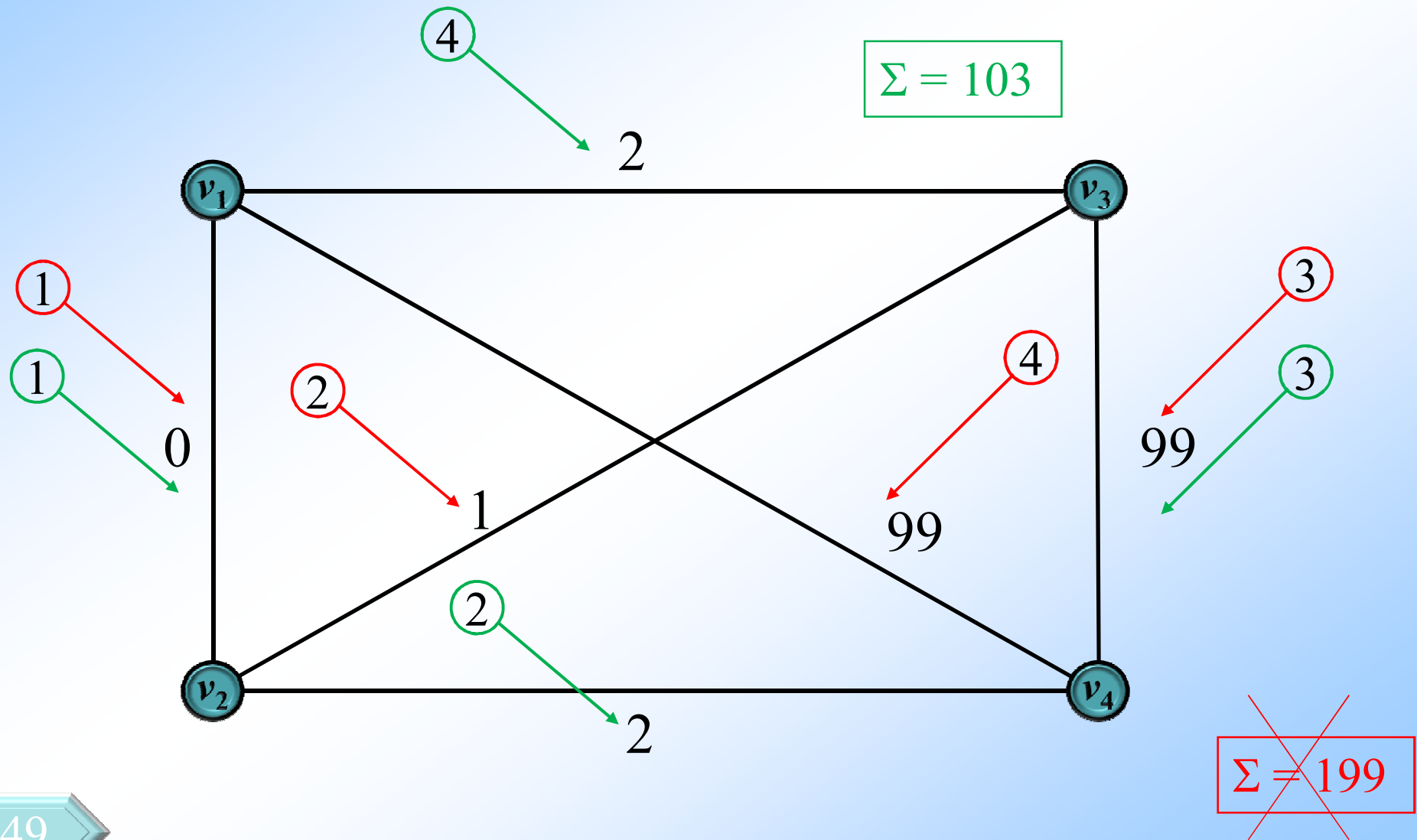
van közvetlen repülő, vonat vagy buszjárat a megfelelő két város között.

Az élek súlya a reprezentált városok közti útiköltség.

A kérdés:

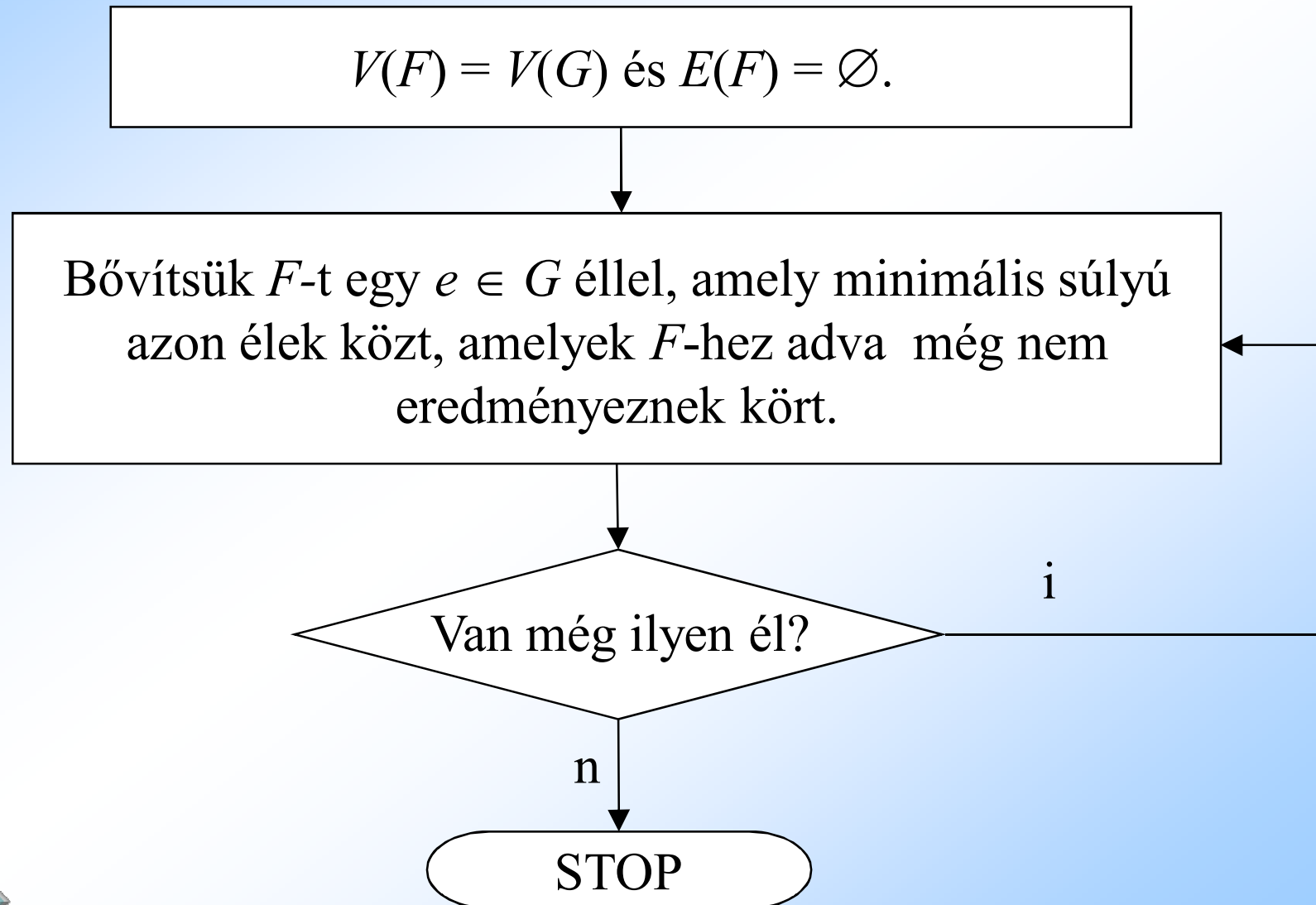
tudunk-e minimális súlyú Hamilton-kört találni a gráfban?

Egy lehetséges mohó algoritmus, amikor
mindig a legolcsóbb utat választja.



Tétel (Kruskal algoritmus)

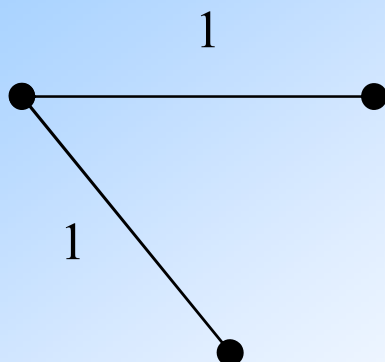
Legyen $G = (V, E, \varphi, w)$ egy véges összefüggő gráf. A következő algoritmus megtalál egy minimális súlyú feszítőfát.



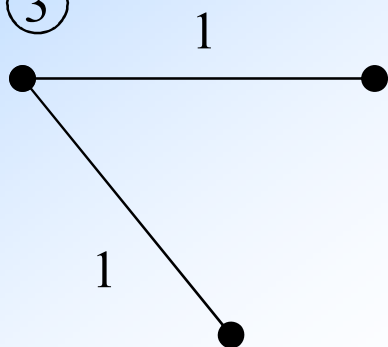
①



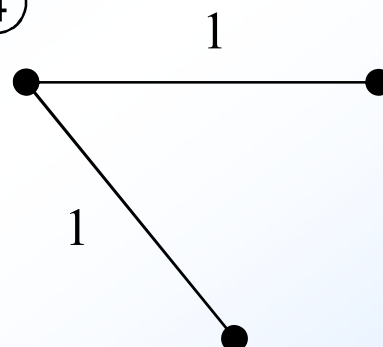
②



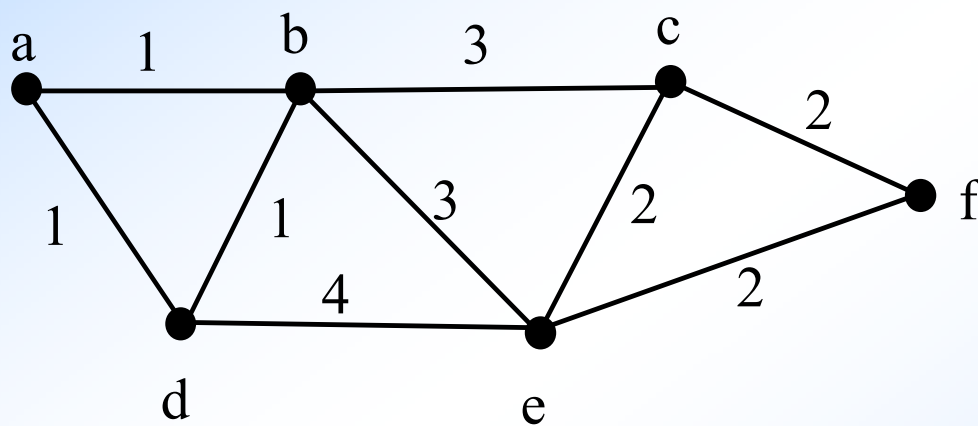
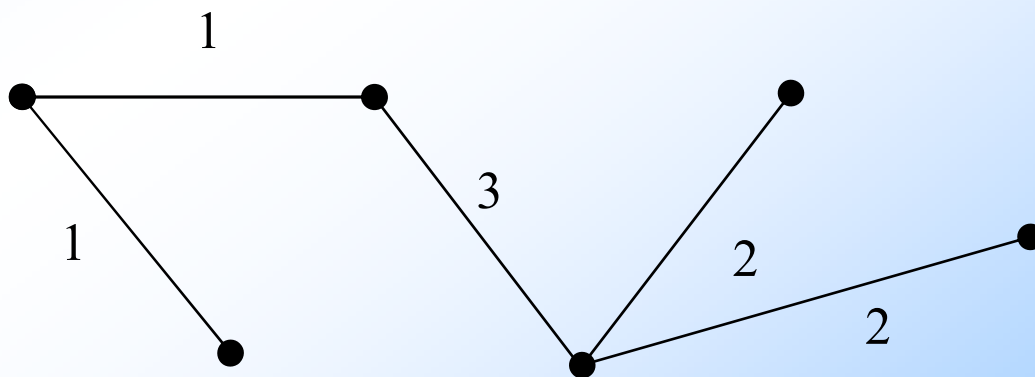
③



④



⑤



Nyilvánvaló, hogy F feszítőfája G -nek.

TFH (indirekt) F_0 minimális súlyú feszítőfa, és $w(F_0) < w(F)$. Ha több ilyen ellenpélda is van, akkor ezek közül válasszuk F_0 -nak azt, melynek a lehető legtöbb közös éle van F -fel.

Legyen $e_0 \in E(F_0) \setminus E(F)$, F fa $\Rightarrow F \cup e_0$ tartalmaz K kört.

Algoritmus $\Rightarrow K$ kör minden $e \in E(K) \setminus \{e_0\}$ élére $w(e) \leq w(e_0)$, 

különben az algoritmus az e_0 élt választotta volna e helyett.

F_0 fa $\Rightarrow F_0 \setminus \{e_0\}$ két komponensre esik szét úgy, hogy

e_0 egyik végpontja az egyik,

a másik végpontja $F_0 \setminus \{e_0\}$ másik komponensében van.

Mivel e_0 mindkét végpontja K -ban van,

K -ban van F -beli út a két végpont közt

$\Rightarrow K$ körnek e_0 -on kívül tartalmaznia kell $e_1 \notin F_0$ élt, amely
összeköti $F_0 \setminus \{e_0\}$ két komponensét.

$\Rightarrow F_1 = F_0 \setminus \{e_0\} \cup \{e_1\}$ feszítőfa lesz



$\Rightarrow w(e_1) \leq w(e_0)$.

$w(e_1) < w(e_0)$

$w(e_1) = w(e_0)$

$\Rightarrow$

$w(F_1) < w(F_0)$

$\Rightarrow$

F_1 -nek eggyel több közös
éle van F -fel, mint F_0 -nak.



F_0 minimális



2. Irányított gráfok

Def

A $G = (\psi, V, E)$ hármast **irányított gráfnak** nevezzük, ha V, E halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi : E \rightarrow V \times V$.

Legyen $e \in E$. Ha $\psi(e) = (u, v)$, akkor az e irányított él **kezdőpontja u , végpontja v .**

Def

Egy $G = (\psi, E, V)$ irányított gráfból az „irányítás törlésével” megkaphatjuk **G -nek megfelelő irányítatlan gráfot**: $G' = (\varphi, E, V)$, azaz ha $\psi(e) = (u, v)$, akkor $\varphi(e) = \{u, v\}$.

Ekkor G egy **irányítása** G' -nek.

Ész

Általában egy gráfnak több irányítása is lehet.

Def

A $G = (\psi, E, V)$ **irányított gráf megfordítása** a $G' = (\psi', E, V)$ gráf, amelyre $\psi(e) = (u, v) \Leftrightarrow \psi'(e) = (v, u)$.

Hurok megfordítása önmaga.

$e \neq f$ **szigorúan párhuzamos élek**, ha $\psi(e) = (u, v)$ és $\psi(f) = (u, v)$.

Pont **kifoka**, $d^+(a)$ a kimenő élek száma,

ha $d^+(v) = 0$, akkor v **nyelő**.

Pont **befoka**, $d^-(a)$ a bemenő élek száma,

ha $d^-(v) = 0$, akkor v **forrás**.

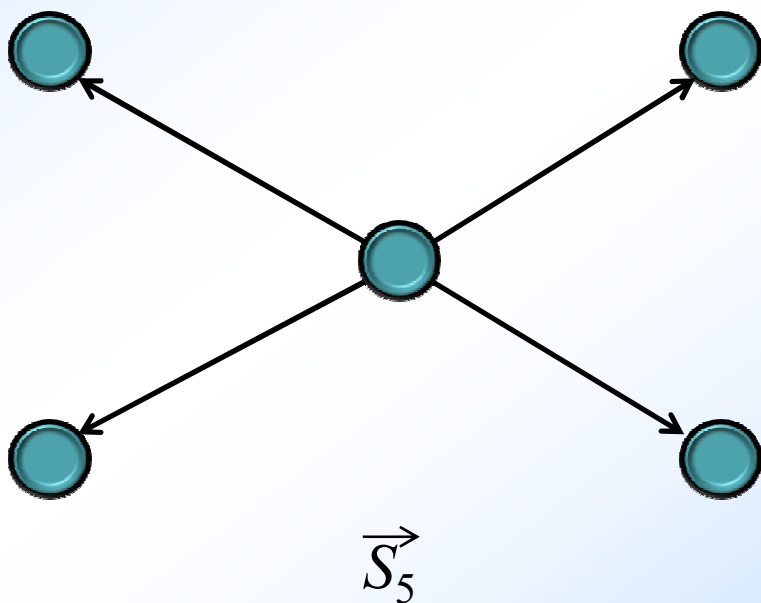
Ész

$$\sum_{a \in V(G)} d^+(a) = \sum_{a \in V(G)} d^-(a) = e(G).$$

Def

A $G = (\psi, E, V)$ és $G' = (\psi', E', V')$ **irányított gráfok izomorfak**, ha létezik $f: E \rightarrow E'$ és $g: V \rightarrow V'$ bijekció úgy, hogy

minden $e \in E$ -re egy $v \in V$ pontosan akkor végpontja e -nek, ha $g(v)$ végpontja $f(e)$ -nek és pontosan akkor kezdőpontja e -nek, ha $g(v)$ kezdőpontja $f(e)$ -nek.



Öt pontú irányított csillag: egy forrás 4 kifokkal és 4 nyelő 1-1 befokkal.

A $G' = (\psi', E', V')$ gráf **irányított részgráfja** a $G = (\psi, E, V)$ gráfnak, ha $E' \subseteq E$, $V' \subseteq V$ és $\psi' \subseteq \psi$. Ekkor a G egy **irányított szupergráfja** of G' -nek.

Ha E' tartalmaz minden olyan élet, amelynek kezdő és végpontja is V' -ben van, akkor G' egy V' által **meghatározott telített irányított részgráf**.

Ha $G' = (\psi', E', V')$ **irányított részgráfja** $G = (\psi, E, V)$ -nek, akkor G' **G -re vonatkozó komplementere** a $(\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V)$ gráf.

Ha G -t nem határozzuk meg külön, akkor egy irányított teljes gráfra vonatkozó komplementerre gondolunk.

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy **irányított gráf**.

Ha $E' \subseteq E$, akkor a G -ből az **E' élhalmaz törlésével kapott gráf**

$$G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V).$$

Ha $V' \subseteq V$, akkor legyen

$$E' = \{e \in E : \exists v \exists v' (\psi(e) = (v, v') \vee \psi(e) = (v', v)) \wedge v \in V'\}.$$

Ekkor a G -ből a **V' csúcshalmaz törlésével kapott gráf**

$$G' = (\psi|_{E \setminus E'}, E \setminus E', V \setminus V').$$

Legyen $G = (\psi, E, V)$ egy irányított gráf.

Egy **n hosszú irányított élsorozat** (séta) G -ben v, v' csúcsok között egy

$v = v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n = v'$ véges sorozat, ahol

$\psi(e_i) = (v_{i-1}, v_i)$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Ha $v = v'$, akkor **zárt**, különben **nyílt az irányított séta**.

Ha minden él különbözik egy irányított sétában, akkor **irányított vonalról** beszélünk.

Ha minden csúcs különbözik egy irányított sétában, akkor **irányított útról** beszélünk.

Egy legalább 1 hosszú zárt irányított út **irányított kör**.

Def

A G irányított gráf **összefüggő**, ha a megfelelő $G' = (V, E')$ irányítatlan gráf összefüggő. A G irányított gráf **komponensei** a megfelelő G' irányítatlan gráf komponenseit jelentik. A komponensek száma $c(G) = c(G')$.

A $G = (V, E)$ gráf **erősen összefüggő**, ha minden $v_1, v_2 \in V(G)$ esetén $v_1 = v_2$, vagy v_1 -ből vezet v_2 -be irányított út, és v_2 -ből v_1 -be is.

Tétel (Erős összefüggőség)

Egy összefüggő gráf akkor és csak akkor irányítható úgy, hogy erősen összefüggő legyen, ha minden **éléhez** tartozik rajta áthaladó kör.

Ész

Hasonló nem mondható el olyan gráfról, melyben minden **csúcson** halad át kör.

Def

Ha a G irányított gráfban ρ relációban lévőknek tekintjük azokat a pontokat, amelyek közt mindkét irányban vezet irányított út, akkor ρ egy ekvivalenciareláció a csúcsok halmazán.

A ρ osztályai által meghatározott telített részgráfok a G **erősen összefüggő komponensei (erős komponensek)**.

Ész

Egy gráf akkor és csak akkor erősen összefüggő, ha minden pontja egy ekvivalencia osztályba tartozik ρ szerint, azaz pontosan egy erős komponense van.

Megállapítások

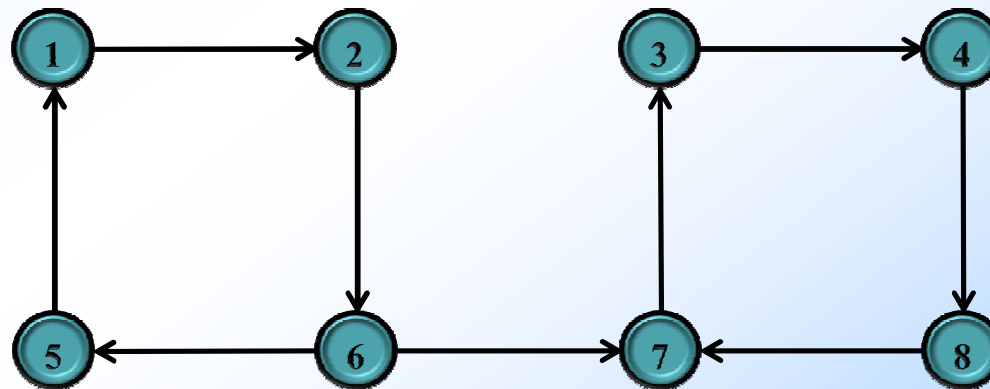
Minden csúcs körön van.

A gráf összefüggő.

Edge (6, 7) nincs körön.

A gráf nem erősen összefüggő.

Van két erősen összefüggő komponense.



Def

Egy irányított gráfot **irányított fának** hívunk, ha pontosan egy olyan pontot tartalmaz, amelynek befoka 0, és a többi csúcs befoka 1.

Ész

A 0 befokú csúcs egyértelműen meghatározott és belőle minden további csúcshoz pontosan egy út vezet.

Def

Irányított fában a 0 befokú pont neve **gyökér**.

n -edik szint: azon csúcsok halmaza,
amelyekhez n hosszúságú út vezet a gyökérből.

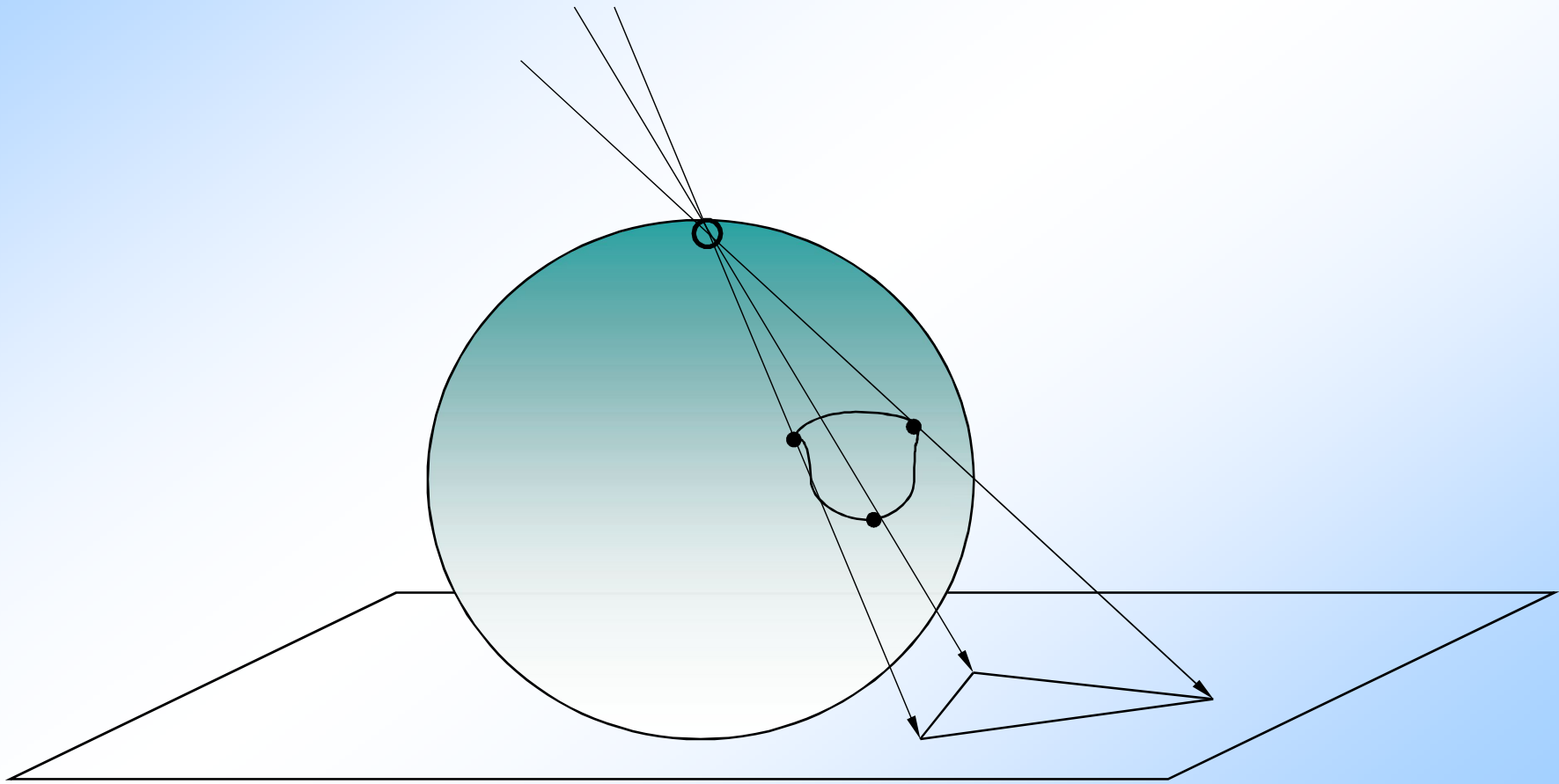
A szintek maximuma a fa **magassága**.

Ha v kezdő, v' és v'' végpontja egy élnek, akkor v a **szülő**, v' és v'' a **gyerekek (testvérek)**.

Irányított fa 0 kifokú csúcsa a **levél**.

3. Síkba rajzolható gráfok

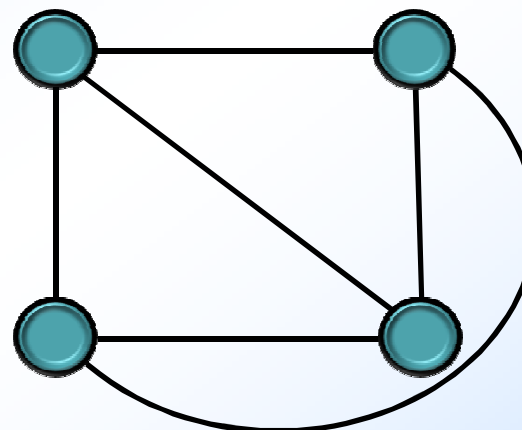
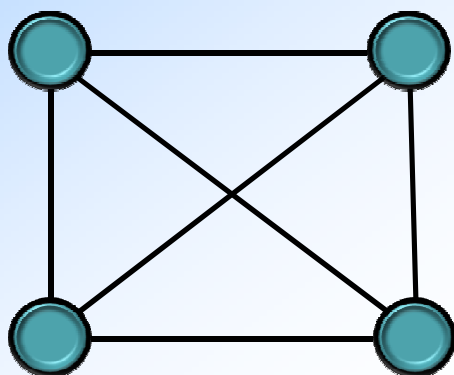
Egy gráf akkor és csak akkor rajzolható gömbre, ha síkba rajzolható.



Def

Egy gráf **síkbarajzolható**, ha lerajzolható a síkra úgy, hogy élei csak a csúcspontokban metszik egymást.

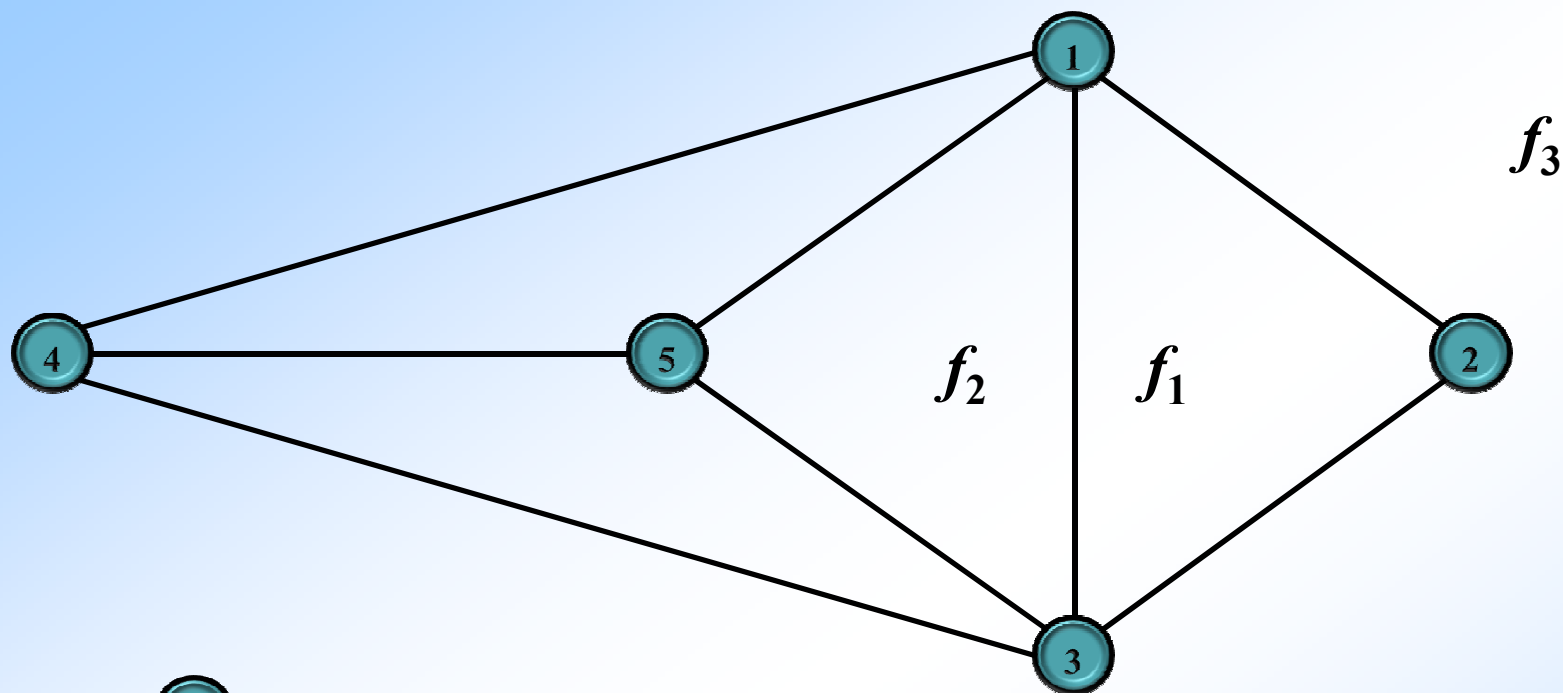
Az így „lerajzolt” gráfokat szokás **síkgráfoknak** is nevezni.



Def

Egy síkgráfban a sík egy részhalmazának egy olyan összefüggő komponensét, amely diszjunkt a gráf csúcsaival és éleivel **tartománynak** nevezzük.

Ezek közül pontosan egy végtelen, neve **külső tartomány**.



f_1

f_2

f_3

Tétel(Euler formula)

Egy összefüggő síkbeli gráf, amelynek t tartománya van (a külső tartományt is beleértve), eleget tesz az **Euler-formulának**:

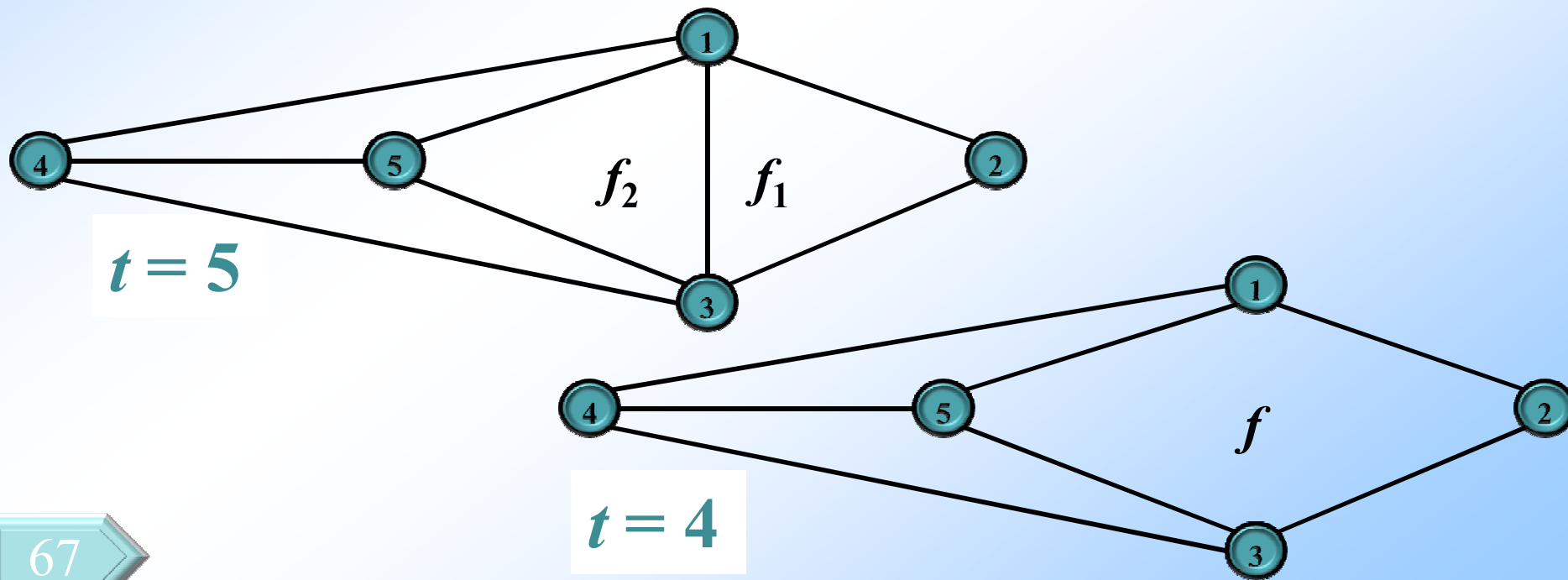
$$v(G) - e(G) + t = 2.$$

Biz(sematikus)

Tekintsünk egy K kört G -ben és egy $e \in E(K)$ élet.

Mivel e két tartomány határán van,

e törlésével két szomszéd régió eggyé válik.



Tehát, az élek és tartományok száma is eggyel csökken.

Így a $v(G) - e(G) + t$ formula értéke ugyanaz marad. 

-1

$-(-1) = +1$

Az éltörléseket ismételve előbb-utóbb megkapjuk G egy feszítőfáját.

Fa $\Rightarrow t = 1$ és az élek száma $v(G) - 1$.



$$v(G) - e(G) + t = v(G) - (v(G) - 1) + 1 = 2.$$



Tétel(síkgráf élszáma)

Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf, és $v(G) \geq 3$, akkor
$$e(G) \leq 3v(G) - 6.$$

Biz

1. eset TFH G összefüggő.

$v(G) = 3$ -ra igaz $\Rightarrow$ tfh $v(G) > 3$.

G egyszerű $\Rightarrow$ minden tartományát legalább 3 él határolja.

$\Rightarrow$ legalább $3t$ élet számoltunk.

Az elvágó éleket egyszer számoltuk, a többit kétszer $\Rightarrow$

$$3t \leq 2e(G).$$

Euler formula $\Rightarrow$

$$3(e(G) - v(G) + 2) \leq 2e(G)$$

$$\Rightarrow e(G) \leq 3v(G) - 6.$$



2. eset TFH G nem összefüggő.

+ élek $\Rightarrow$ 1. eset.



Tétel (minimális fokszám síkgráfban)

Ha G egyszerű, síkba rajzolható gráf, akkor

$$\delta = \min_{a \in V(G)} d(a) \leq 5.$$

Biz

TFH(indirekt) $\delta \geq 6$.

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $v(G) \geq 3$.

$$\sum_{a \in V(G)} d(a) = 2e(G)$$

$$\delta \geq 6 \Rightarrow$$

$$6v(G) \leq 2e(G)$$

Tétel (síkgráf élszáma) $\Rightarrow$

$$2e(G) \leq 6v(G) - 12$$

$$6v(G) \leq 6v(G) - 12$$



Tétel(Kuratowsky gráfok)

A Kuratowsky gráfok (K_5 and $K_{3,3}$) nem rajzolhatók síkba.

Biz

TFH(indirekt) K_5 és $K_{3,3}$ síkbarajzolható.

$K_{3,3}$ esetén, mivel $v(G) = 6$ és $e(G) = 9$,

Euler's formula $\Rightarrow$ $t = 5$.

Viszont $K_{3,3}$ nem tartalmaz háromszöget és nincs szeparáló éle.

$$\Rightarrow 4t \leq 2 e(G) \quad \Rightarrow 20 \leq 18$$



K_5 esetén, mivel $v(G) = 5$ és $e(G) = 10$,

Tétel(síkgráf élszáma) $\Rightarrow$ $e(G) \leq 3v(G) - 6$,

$$\Rightarrow 10 \leq 9.$$



Def

Egy e él **szubdivíziójáról** beszélünk, ha e -t egy 2 hosszúságú úttal helyettesítjük.

Egy másodfokú v pont **simítása** az a transzformáció, amikor v -t töröljük és szomszédait összekötjük egy éllel.



Def

Két gráf **topologikusan izomorf**, ha a szubdivízió és simítás véges sokszori alkalmazásával izomorf gráfokba transzformálhatóak.

Tétel (Kuratowsky tétel)

Egy egyszerű véges gráf **akkor és csak akkor** rajzolható síkba, ha nem tartalmaz a Kuratowski gráfok valamelyikével topologikusan izomorf részgráfot.

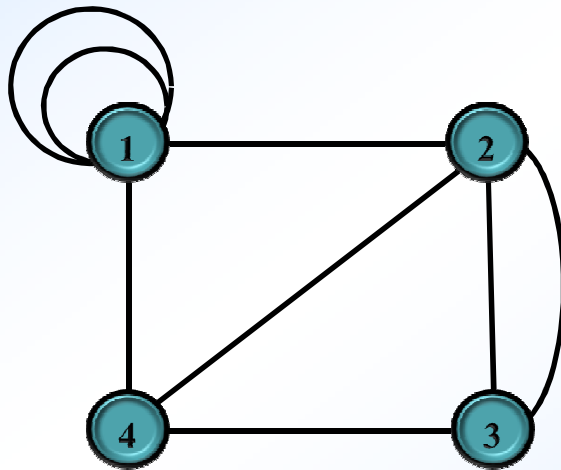
Legyen a G gráfban: $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ és $E = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Szomszédsági mátrix

egy $B_{n \times n}$ mátrix, ahol

ha irányított b_{ij} = ahány él van v_i kezdő és v_j végponttal

ha irányítatlan $b_{ij} = \begin{cases} i = j \text{ esetén ahány hurokél illeszkedik } v_i\text{-re} \\ i \neq j \text{ esetén ahány él van } v_i \text{ és } v_j \text{ közt} \end{cases}$



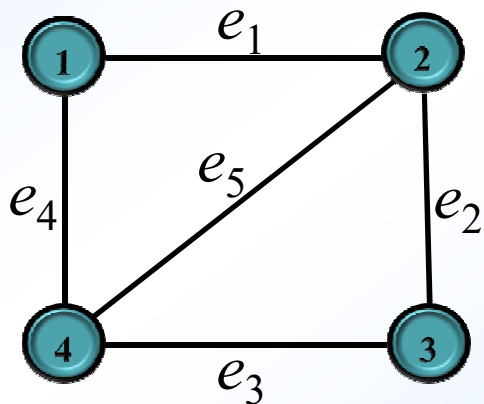
$$B_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Illeszkedési mátrix

egy $B_{n \times m}$ mátrix, ahol

ha irányított $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } e_j\text{-nek } v_i \text{ kezdőpontja} \\ -1 & \text{ha } e_j \text{ nem hurokél és } v_i \text{ a végpontja} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

ha irányítatlan $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } e_j \text{ illeszkedik } v_i \text{ pontra} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$



$$B_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$