

Diszkrét matematika III

Gráfelméleti alapok

Farkas Gábor

farkasg@inf.elte.hu

gaborfarkasphd.wixsite.com/gaborfarkasphd

2017 Február

ELTE

Írányítatlan gráfok

Def

A $G = (V, E, \varphi)$ hármast **(írányítatlan) gráfnak** nevezzük, ha V, E halmazok, $V \neq \emptyset$, $V \cap E = \emptyset$ és $\varphi : E \rightarrow [V]^2$.

$[V]^2 = \{ [a, b] \mid a, b \in V \}$, ahol $[a, b] = [b, a]$.

V : pont-, csúcshalmaz, $V(G)$ G pontjai, $v(G) = |V(G)| = \#V$

E : élhalmaz, $E(G)$ G élei, $e(G) = |E(G)| = \#E$

Ész

- (i) $E = \text{dmn}(\varphi)$
- (ii) $\varphi(e) = \{v_1, v_2\} \subseteq V$ minden $e \in E$ -re.

véges gráf: $V(G)$, $E(G)$ véges

$e \in E$ él végpontjai (e illeszkedik a-ra és b-re):

ha $a, b \in V$ esetén $\varphi(e) = [a, b]$

hurokél: $a = b$

párhuzamos (többszörös) él $e, f \in E$: ha $\varphi(e) = \varphi(f)$

szomszédos él $e, f \in E$: ha $\varphi(e) = [a_1, a_2]$, $\varphi(f) = [b_1, b_2]$ esetén
 $\{a_1, a_2\} \cap \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$

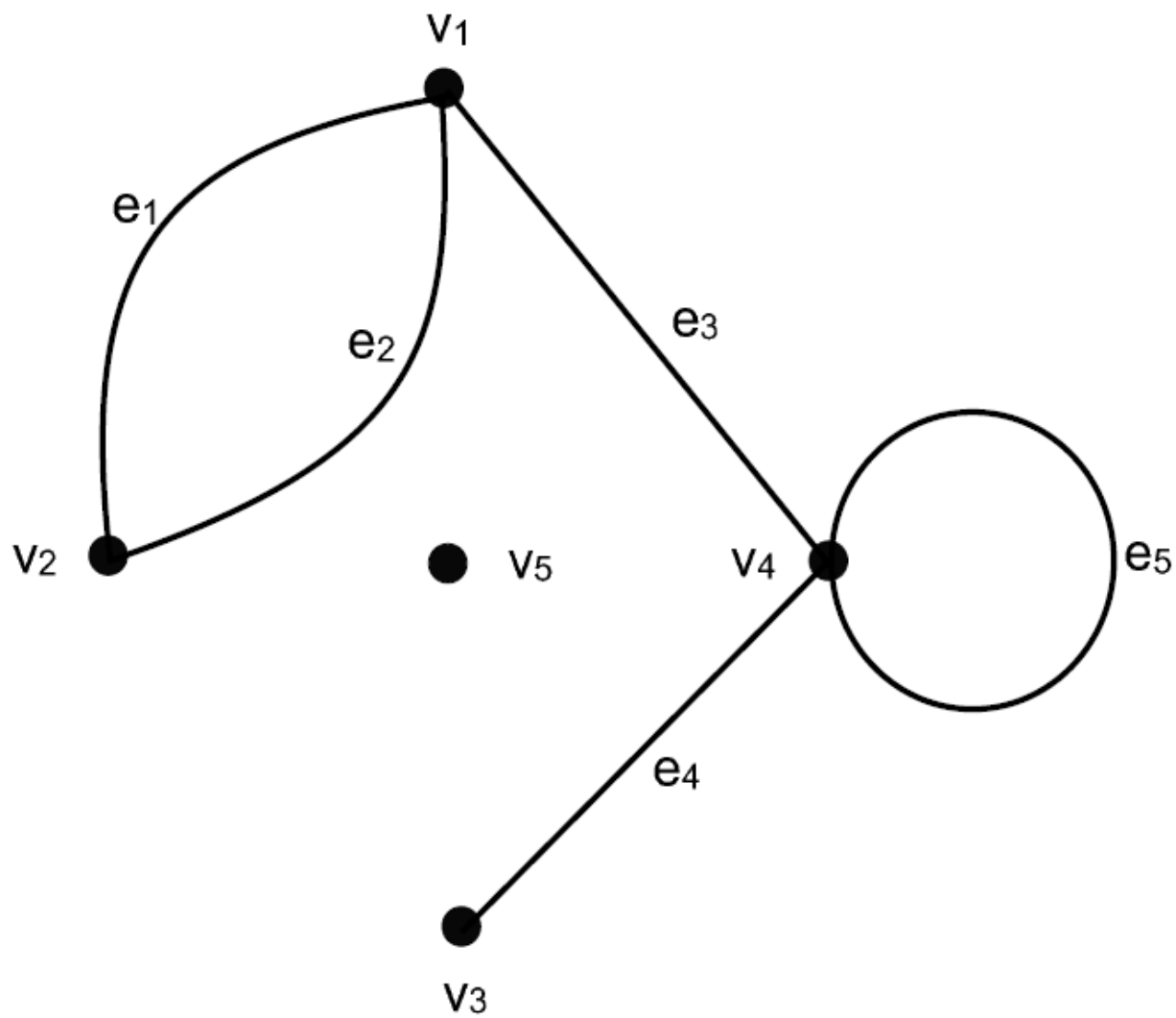
szomszédos csúcsok $a_1, a_2 \in V$: ha $a_1 \neq a_2$ és $\exists e \in E$:
 $\varphi(e) = [a_1, a_2]$

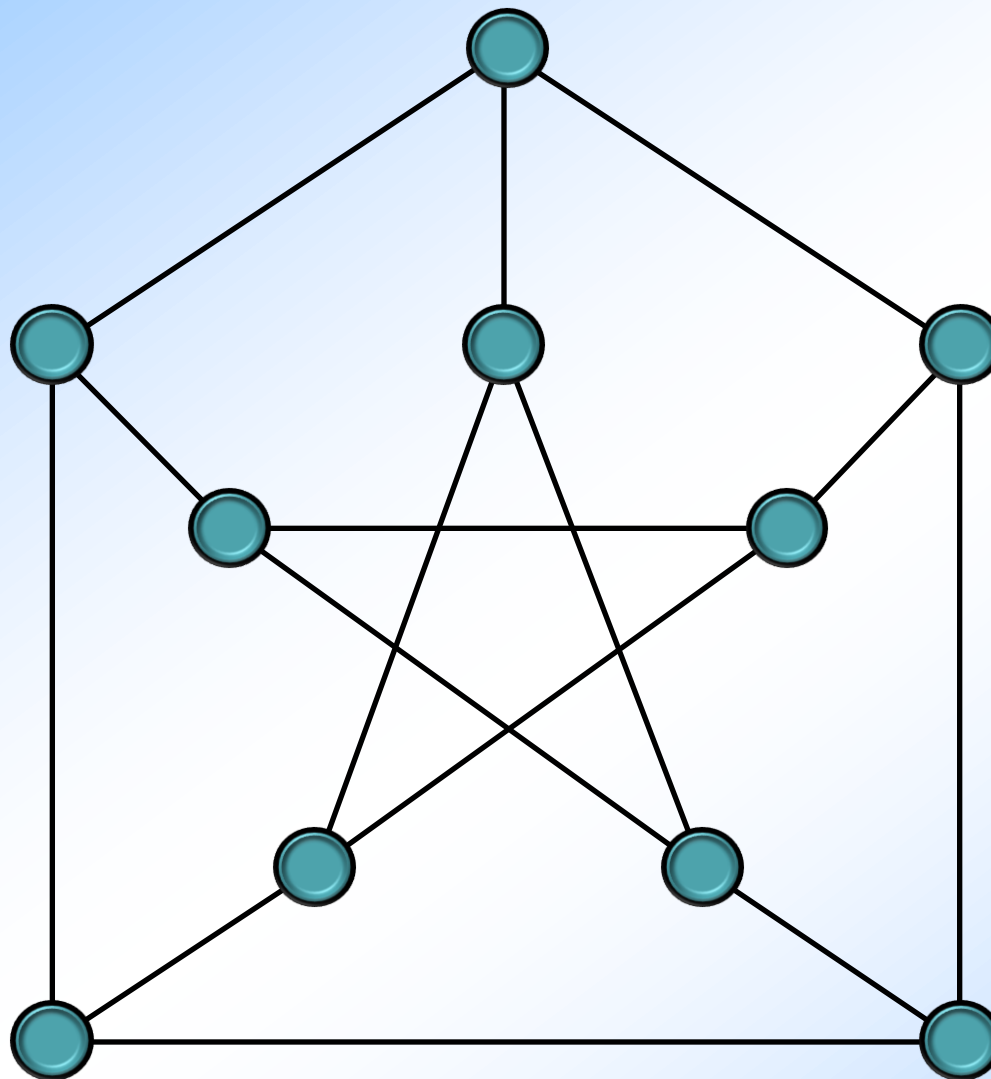
a csúcs foka: a rá illeszkedő élek száma (huroknál 2), jelölés: **$d(a)$**

izolált csúcs a : $d(a) = 0$

egyszerű gráf: hurok és többszörös él nélküli gráf

A $G = (V, E)$ gráf **reguláris**, ha $d(a)$ értéke azonos minden $a \in V$ -re,
 n -reguláris, ha ekkor $d(a) = n$ valamely n természetes számra.





Petersen - gráf (3-reguláris)

Tétel(fokszám-élszám)

Legyen $G = (V, E)$. Ekkor

G -ben a páratlan fokú csúcsok száma páros.

Biz

$$\sum_{a \in V} d(a) = \sum_{d(a) \equiv 0 \pmod{2}} d(a) + \sum_{d(a) \equiv 1 \pmod{2}} d(a) \equiv 0 \pmod{2},$$

amiből kapjuk, hogy

$$\sum_{d(a) \equiv 1 \pmod{2}} d(a) \equiv 0 \pmod{2}.$$



Def

A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ gráf **izomorf**, ha létezik $\pi: V \rightarrow V'$ és $\rho: E \rightarrow E'$ bijekció úgy, hogy $a \in V$ és $e \in E$ illeszkedik G -ben $\Leftrightarrow \pi(a)$ és $\rho(e)$ illeszkedik G' -ben.

A $G = (V, E)$ és $G' = (V', E')$ **egyszerű** gráf **izomorf**, ha létezik $\pi: V \rightarrow V'$ bijekció úgy, hogy $a, b \in V$ szomszédos G -ben $\Leftrightarrow \pi(a)$ és $\pi(b)$ szomszédos G' -ben.

A $G = (V, E)$ egyszerű gráf **teljes gráf**, ha bármely két pontja szomszédos. K_n jelöli az n pontú teljes gráfot.

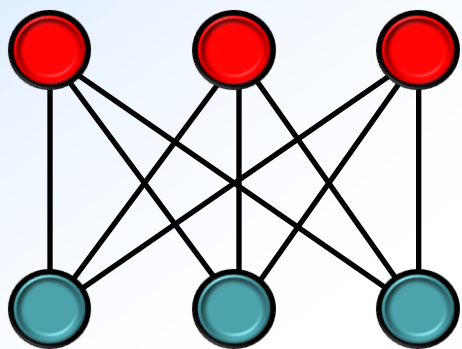
Ész

ugyanannyi csúcsszámú teljes gráfok izomorfak

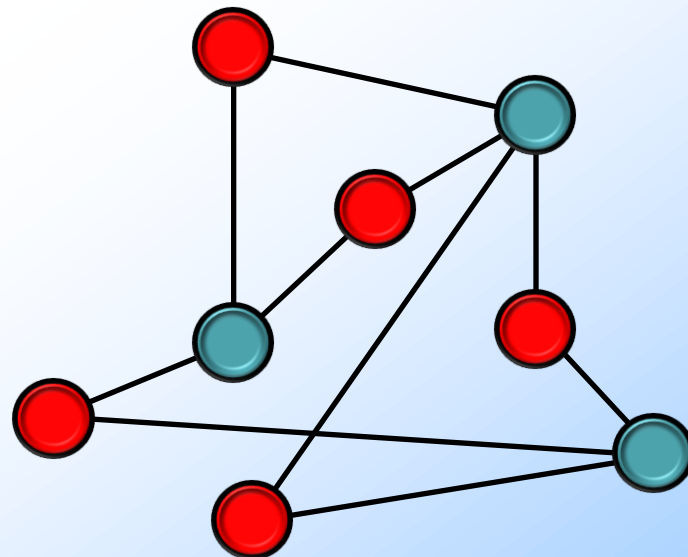
K_n -nek $n(n-1)/2$ éle van

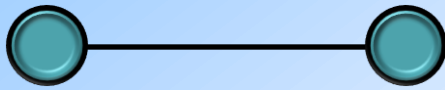
Def

A $G = (V, E, \varphi)$ hármast **páros gráfnak** nevezzük, ha $V = V' \cup V'', V' \cap V'' = \emptyset$ és G minden élének egyik végpontja V' -ben, másik végpontja V'' -ben van.

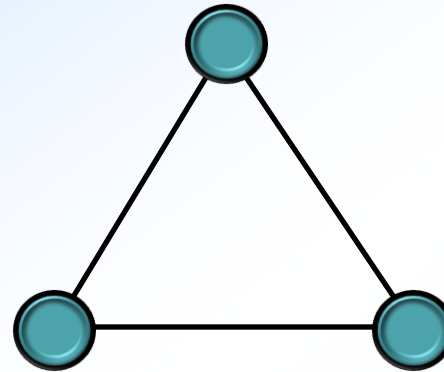


$K_{3,3}$: a 6 pontú teljes páros gráf

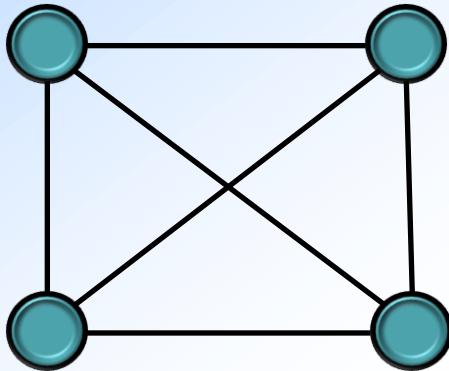




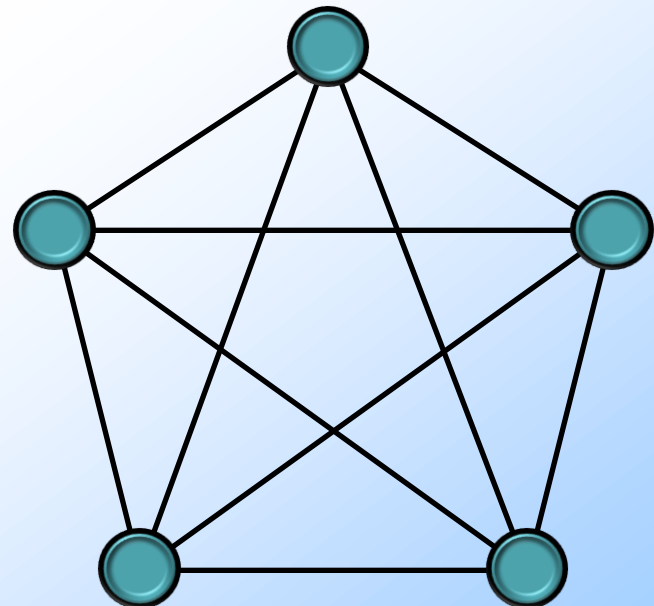
K_2



K_3



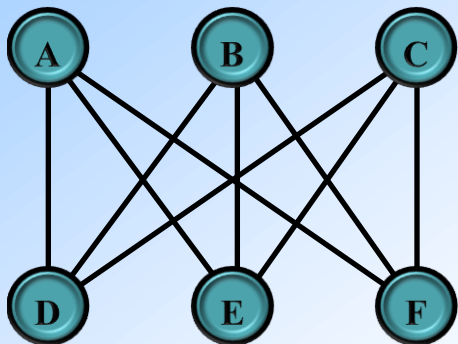
K_4



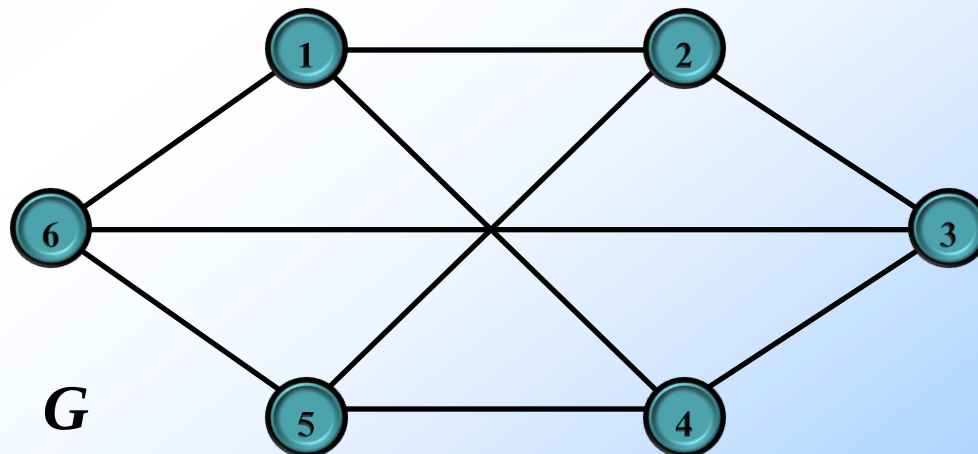
K_5

K_n teljes gráfok
 $n = 2, 3, 4, 5.$

$K_{3,3}$ és G izomorf?



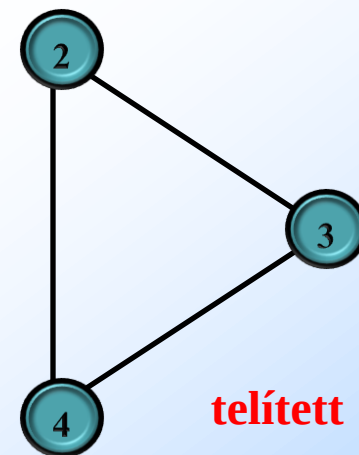
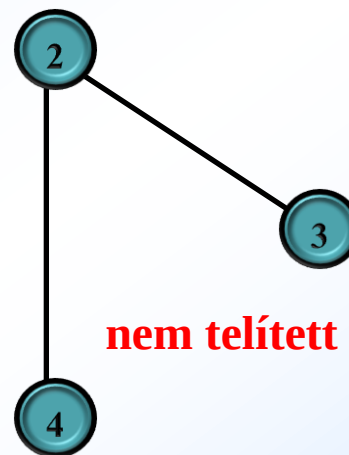
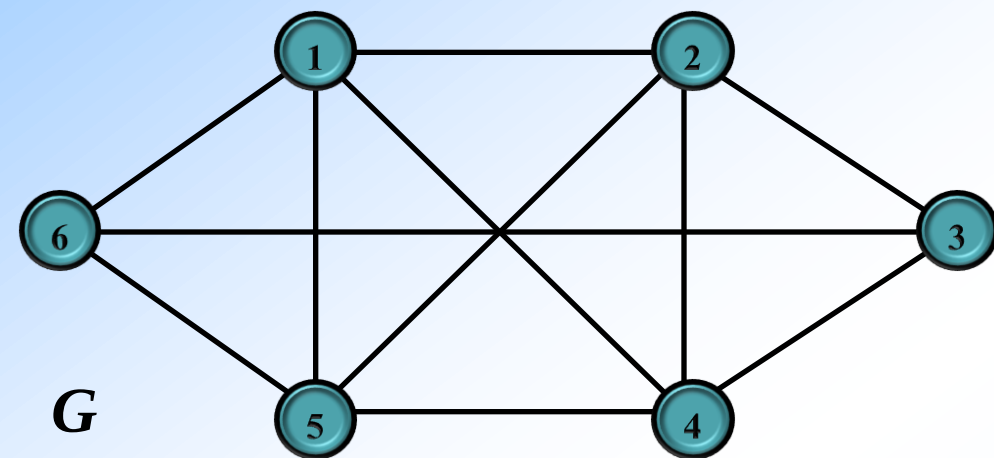
$A \rightarrow 1, B \rightarrow 3, C \rightarrow 5, D \rightarrow 2, E \rightarrow 4, F \rightarrow 6$



Def

A $G' = (V', E', \varphi')$ gráf a $G = (V, E, \varphi)$ gráf **részgráfja**, ha

1. $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$, valamint
2. $\varphi'(e) = \varphi(e)$ minden $e \in E'$ -re.



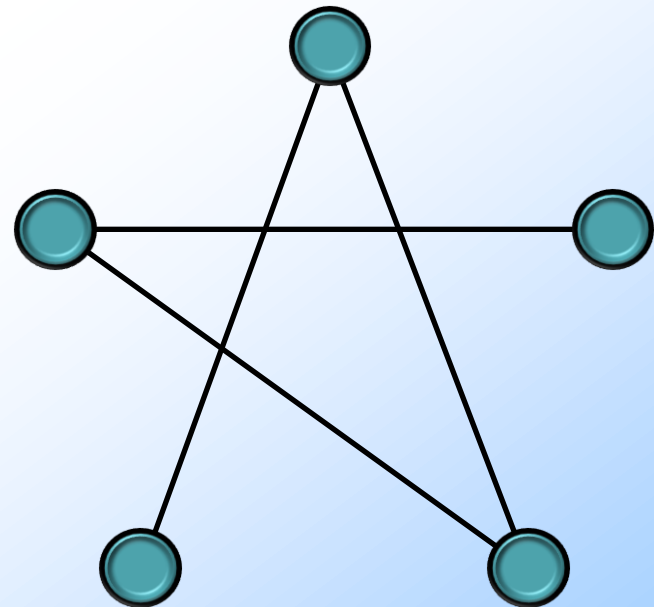
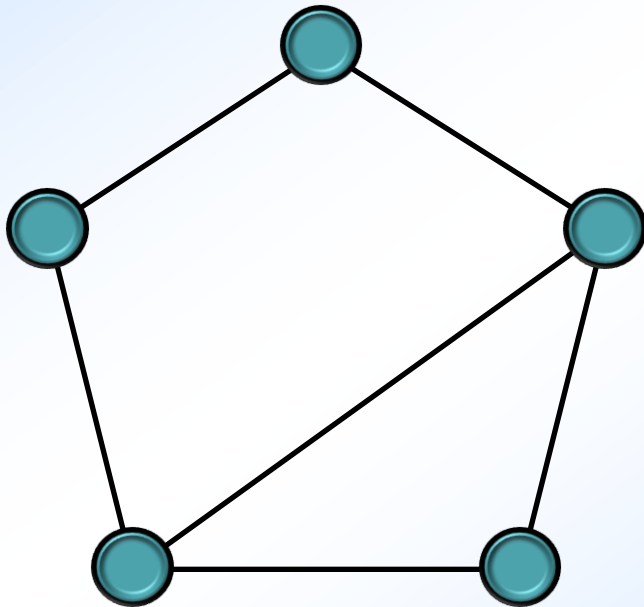
Def

Ha a $G' = (V', E', \varphi')$ gráf a $G = (V, E, \varphi)$ gráf részgráfja, és E' mindazon E -beli éleket tartalmazza, melyek végpontjai V' -ben vannak, akkor G' -t **telített részgráfnak** nevezzük, vagy pontosabban **V' által meghatározott telített részgráfnak**.

$\overline{G}$ az n -pontú, egyszerű $G = (V, E)$ gráf **komplementer gráfja**, ha

$$\overline{V}(G) = V(G) \text{ és}$$

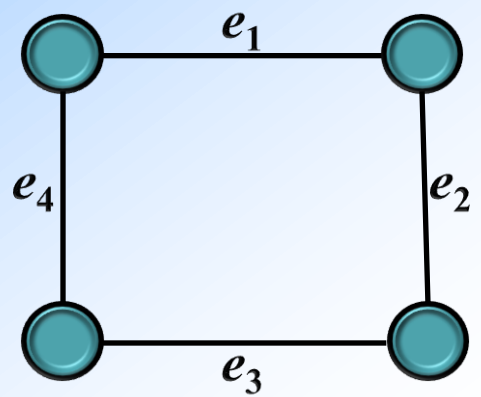
$$E(\overline{G}) = E(K_n) \setminus E(G).$$



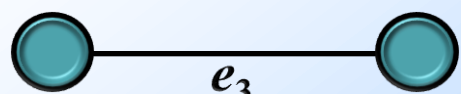
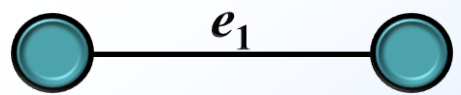
Általánosabban, ha H részgráfja G gráfnak, akkor a

$$(V(G), E(G) \setminus E(H), \phi|_{E \setminus E'}) \leftarrow \text{megszorítás}$$

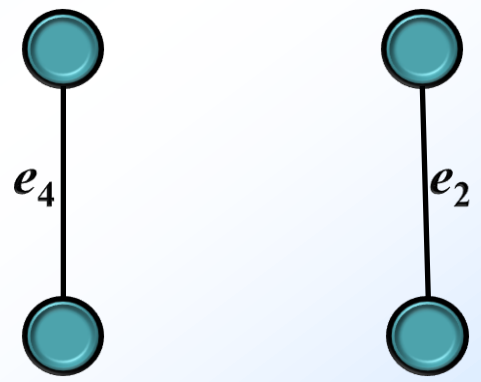
gráf a **H G -re vonatkoztatott komplementere.**



$G = (V, E)$



H



$$(V(G), E(G) \setminus E(H), \phi|_{E \setminus E'})$$

vonatkoztatott

Legyen $G = (V, E, \varphi)$ egy gráf, ahol $E' \subseteq E$ és $V' \subseteq V$. Ekkor a

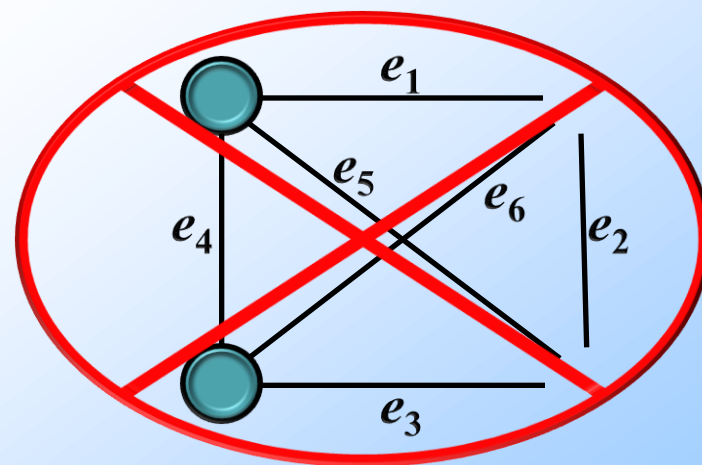
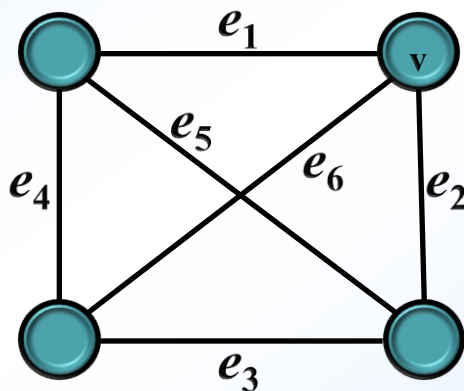
$$G' = (V, E \setminus E', \varphi|_{E \setminus E'})$$

gráf a **G -ből E' élhalmaz törlésével kapott gráf,**

$$G' = (V \setminus V', E \setminus E', \varphi|_{E \setminus E'})$$

gráf a **G -ből V' csúcshalmaz törlésével kapott gráf, ahol**

$$E' = \{e \in E: \varphi(e) \cap V' \neq \emptyset\}.$$



él és csúcs törlés

Def

Legyen k természetes szám. **k hosszú élsorozat (séta) a_0 -ból a_k -ba** az $[a_0, e_1, a_1, e_2, a_2, \dots, e_k, a_k]$ sorozat, ha $a_0, a_1, \dots, a_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ és $\varphi(e_i)=[a_{i-1}, a_i]$ minden $i=1, 2, \dots, k$ -ra.

Egy élsorozat **út**, ha benne minden csúcs különböző és **vonal**, ha minden éle különböző.

Egy élsorozat **zárt**, ha $a_0 = a_k$, különben **nyílt**. **Kör** az a zárt élsorozat, melyben a többi csúcs egymástól és a_0 -tól különbözik, és élei is mind különbözőek.

Ész

út és kör hossza az éleinek száma

0 hosszúságú séta út

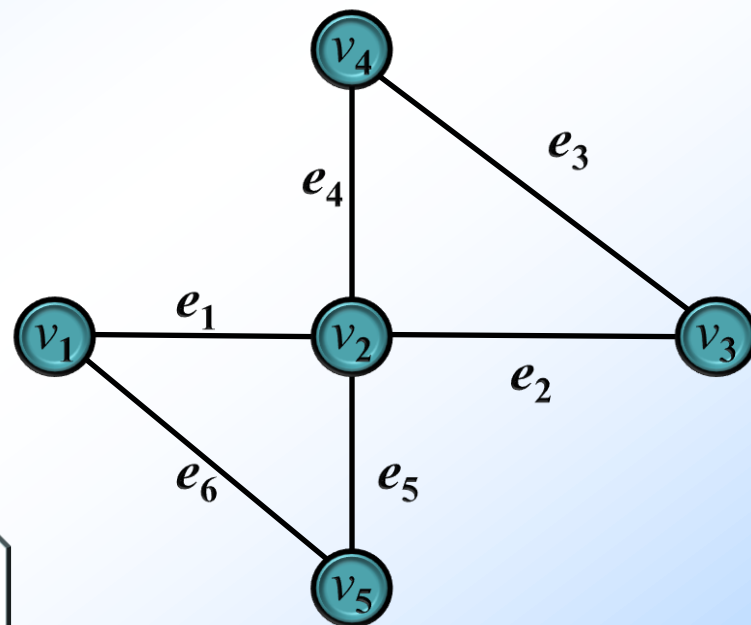
út mindig vonal

$$\text{út} \subset \text{vonal} \subset \text{séta}$$

examples

$$[v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4]$$

$$[v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2]$$

$$[v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_5, v_5]$$


$$\text{kör} \subset \text{zárt vonal} \subset \text{zárt séta}$$

$$[v_1, e_1, v_2, e_5, v_5, e_6, v_1]$$

$$[v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_5, v_5, e_6, v_1]$$

$$[v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1]$$

Def

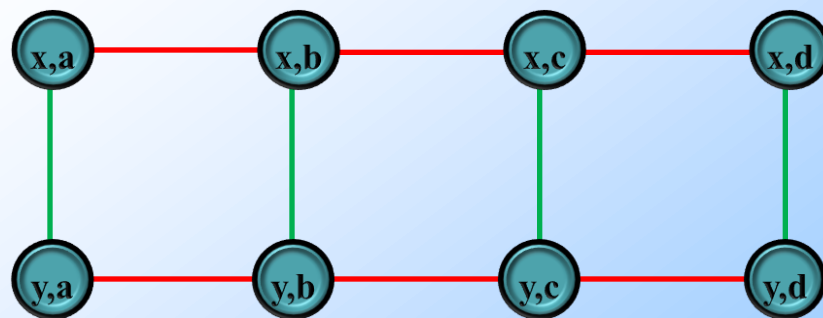
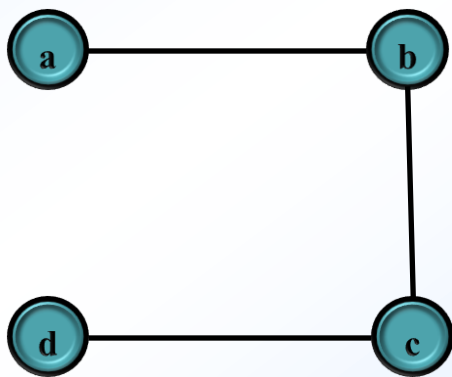
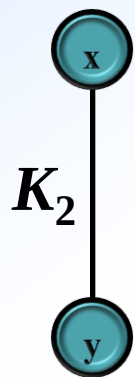
Legyen I egy index halmaz és $G = (\varphi_i, E_i, V_i)$ gráfok egy indexelt családja ($i \in I$). Ezen gráfok **Descartesi szorzata** a

$$G = \times_{i \in I} G_i = (\varphi, E, V) \text{ gráf, ahol}$$

$$V = \times_{i \in I} V_i \text{ és } v, v' \text{ szomszédos}$$

akkor és csak akkor ($\Leftrightarrow$)

ha pontosan egy koordinátájuk különbözik, és ha ez a j -edik, akkor v, v' szomszédos G_j -ben.



A **0-dimenziós hiperkocka** H_0 egyetlen csúcsból áll.

Az **1-dimenziós hiperkocka** H_1 két csúcsból és az őket összekötő élből áll.

$n > 1$ esetén, az **n -dimenziós hiperkocka** n darab H_1 hiperkocka Descartesi szorzatából áll.

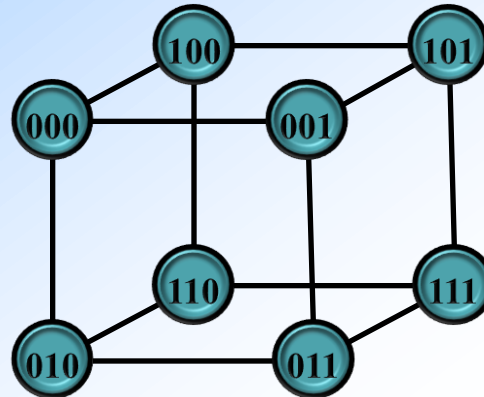
$$H_n = H_{n-1} \times H_1.$$

Def (alternatív)

A H_n **n -dimenziós hiperkocka** 2^n csúcsból áll, amelyeket n -hosszú bináris stringekkel indexelünk.

Azok a pontpárok szomszédosak, amelyek indexe pontosan egy helyen tér el a másiktól. $|E(H_n)| = n \cdot 2^{n-1}$.

$$H_3 = H_2 \times H_1$$



$$|V(H_3)| = 8$$

$$|E(H_3)| = 12$$

Def

Két csúcs távolsága az őket összekötő legrövidebb séta hossza. (ha nem létezik ilyen séta, akkor $+\infty$).

Def

Egy **összefüggő gráf átmérője** a két legtávolabbi csúcsának távolsága, tehát az összes csúcspár közötti legrövidebb utak közül a leghosszabbnak a hossza.

Tétel (út létezése két csúcs között)

Minden olyan nyílt élsorozat, amely az a_0 és a_n ($a_0 \neq a_n$) csúcsokat köti össze, tartalmaz részsorozatként ugyanezen csúcsokat összekötő utat.

Biz

Ha minden i, j esetén $a_i \neq a_j$, akkor kész, különben legyen $a_i = a_j$ valamely indexekre.

$\Rightarrow$

$[a_0, e_1, a_1, e_2, a_2, \dots, e_i, a_i, e_{i+1}, \dots, a_j, e_{j+1}, \dots, e_n, a_n]$

élsorozatból elhagyható az $e_{i+1}, \dots, a_j$ rész, ...

Véges lépésben különböző csúcsokat kapunk

$\Rightarrow$ út



Tétel(zárt vonalak)

Bármely gráfban egy legalább 1 hosszú zárt vonal véges sok páronként éldiszjunkt kör egyesítése.

Biz

Ha a vonalon csak az első és utolsó csúcs egyezik $\Rightarrow$ 1 db kör

Kül. „induljunk el” a vonalon és menjünk az **első** csúcs-ismétlődésig

Vonalon vagyunk $\Rightarrow$ a két azonos csúcs közt „körön mentünk”

„Kiradírozva” ezt a kört marad egy rövidebb zárt vonalunk

Ha ez a zárt vonal kör, akkor készen vagyunk, ha nem ...



Def

Egy gráf **összefüggő**, ha benne bármely két csúcs összeköthető sétával (következésképpen úttal is).

Def

Legyen $\sim$ a következő ekvivalenciareláció :

$a_1, a_2 \in V(G)$ esetén $a_1 \sim a_2$, ha $a_1 = a_2$ vagy a_1 és a_2 között van út.

Az azonos osztályokba eső csúcsok által meghatározott telített részgráfok a G gráf **(összefüggő) komponensei**, számuk $c(G)$.

Ész

kül. osztályba eső csúcsok nem szomszédosak

$\forall$ él hozzárendelhető egy komponenshez

egy gráf összefüggő, ha egy komponense van

Fa: összefüggő, körmentes gráf.

Tétel(ekvivalens állítások fákra)

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa.
- (2) G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem összefüggő.
- (3) Ha v, v' a G különböző csúcsai, akkor pontosan egy út vezet v -ből v' -be.
- (4) G -ben nincs kör, de bármely új él hozzáadásával kapott gráf már tartalmaz kört.

(1) $\Rightarrow$ (2):

Tfh indirekte v, v' közti él törlésével összefüggő marad a fa

$\Rightarrow$ marad egy másik út v, v' közt

ez az út + törölt él kört alkot az eredeti fában



(2) $\Rightarrow$ (3):

Tfh indirekte v, v' közt van két különböző út:

$v, v_1, v_2, \dots, v'$, és $v, v_1', v_2', \dots, v'$.

Legyen k az első olyan index, amelyre $v_k \neq v_k'$,

töröljük a v_{k-1}, v_k végpontú élt

helyettesíthető:

$v_{k-1}, v_k', v_{k+1}', \dots, v', \dots, v_{k+1}, v_k$ -val.

$\Rightarrow$ összefüggő marad!



(3) $\Rightarrow$ (1) (kontrapozíció $\neg(1) \Rightarrow \neg(3)$):

Tfh indirekte van kör a gráfban

$\Rightarrow$ a kör v, v' pontjai közt van két különböző út



(1) $\Rightarrow$ (4): fa körmentes összefüggő: húzzunk be egy élt v, v' közé

$v = v'$ hurokél kész

$v \neq v'$ „rég” út + új él: kör

(4) $\Rightarrow$ (1): tetszőleges $v \neq v'$ csúcsokra a körmentes G gráfban

ha szomszédosak, akkor van egy út $\Rightarrow$ összefüggő $\Rightarrow$ fa

ha nem, húzzunk be egy élt v, v' közé

(4) $\Rightarrow$ kör „keletkezik”

ennek a körnek a „maradék” része az út $\Rightarrow$ összefüggő $\Rightarrow$ fa



Tétel(elsőfokú pontok)

Ha egy véges gráfban nincs kör, de van él, akkor van benne legalább 2 elsőfokú csúcs.

Biz

válasszunk egy maximális hosszúságú u utat v, v' végpontokkal

Tfh (indirekte) v, v' nem elsőfokú

illeszkedik rájuk él

hol van ezen él másik végpontja?

nincs rajta u -n

u -nál hosszabb utat találtunk



u -n van

kört találtunk



Tétel(ekvivalens állítások n -pontú fákra)

Egy G egyszerű gráfra a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) G fa.
- (2) G -ben nincs kör és $n - 1$ éle van.
- (3) G összefüggő és $n - 1$ éle van.

Biz

$n = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás

Legyen $n > 1$, és tegyük fel, hogy minden n -nél kevesebb pontú fára igaz az állítás

tekintsünk egy n pontú fát

próbáljunk kitörölni egy élt és egy pontot, úgy hogy fa maradjon

Tétel(elsőfokú pontok) $\Rightarrow$

létezik elsőfokú pont: egyet hagyjunk el éllel együtt

$\Rightarrow$ marad egy körmentes összefüggő gráf $\Rightarrow$ fa

továbbá ennek $n - 1$ pontja van

érvényes rá az indukciós feltevés: $n - 2$ éle van

(2) $\Rightarrow$ (3) pontszámra vonatkozó teljes indukció

$n = 1$ esetén nyilvánvaló az állítás

Legyen $n > 1$, és tfh $\forall$ n -nél kevesebb pontú ilyen gráfra igaz az állítás

tekintsünk egy n pontú körmentes gráfot, amelynek $n - 1$ éle van

próbáljunk törölni egy élt és egy pontot, úgy hogy körmentes maradjon

Tétel(elsőfokú pontok) $\Rightarrow$

létezik elsőfokú pont: hagyjuk el az éllel együtt

marad egy $n - 1$ pontú körmentes gráf $n - 2$ éllel

Indukciós feltevés miatt ez összefüggő is

(3) $\Rightarrow$ (1)

tekintsünk egy n pontú összefüggő gráfot, amelynek $n - 1$ éle van
tfh van benne kör

körből elhagyunk egy élt, ettől még összefüggő marad

...

végül, ha elfogytak a körök k db törlés után n pontú fát kapunk

az élek száma $n - 1 - k$

de (1) $\Rightarrow$ (2) miatt az élek száma $n - 1$

$\Rightarrow k = 0$

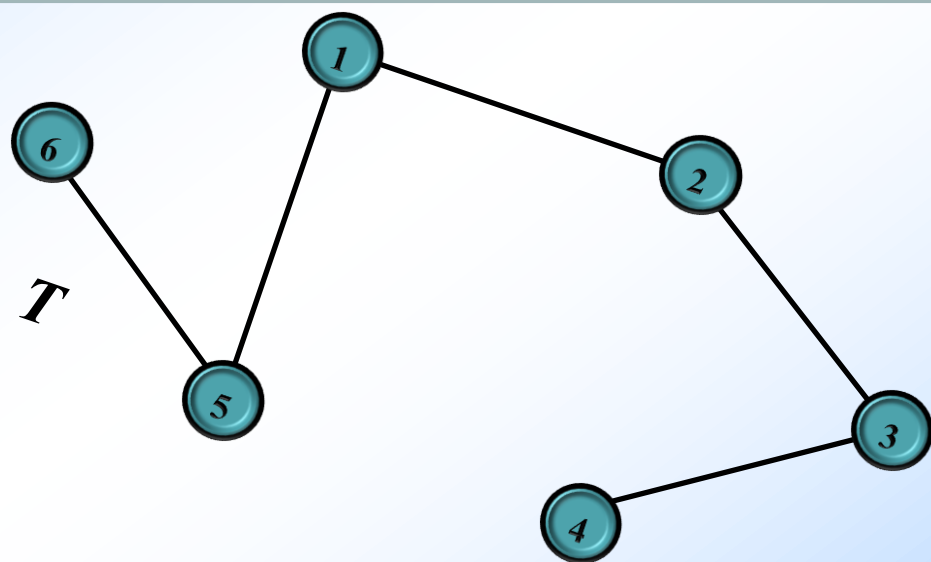
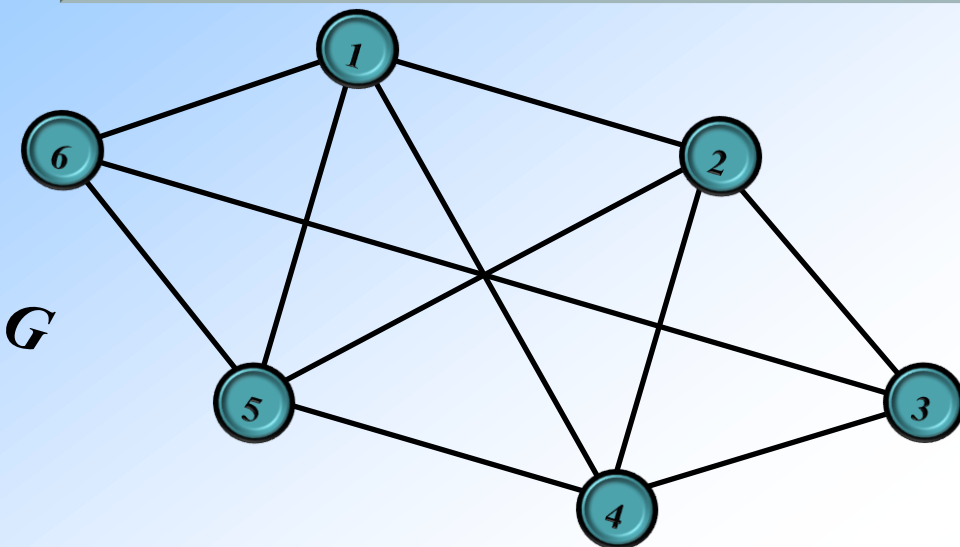
0 db kör volt az eredeti gráfban $\Rightarrow$ fa



Def

Az F gráf a G gráf **feszítőfája**, ha

F részgráfja G -nek, F fa és $V(T) = V(G)$.



Tétel(feszítőfa létezése)

Minden véges összefüggő G gráfnak létezik feszítőfája.

Biz

Ha van kör, akkor hagyjuk el a kör egyik élét.

Ezt folytatva a gráf összefüggő marad.

Véges lépésben egy fát kapunk.



Theorem (körök száma)

Egy véges összefüggő $G = (E, V)$ gráfban létezik legalább
 $e(G) - v(G) + 1$ éldiszjunkt kör.

Biz

Tétel(feszítőfa létezése) $\Rightarrow$

$\exists T$ feszítőfa, aminek $v(G) - 1$ éle van

Legyen K_f az a kör ami $T \cup \{f\}$ -ben van, ahol $f \in E(G) \setminus E(T)$

T_G komplementerben legalább

$$e(G) - e(T) = e(G) - (v(G) - 1) = e(G) - v(G) + 1$$

ilyen f él van $\Rightarrow$

legalább $e(G) - v(G) + 1$ különböző kör



Ész

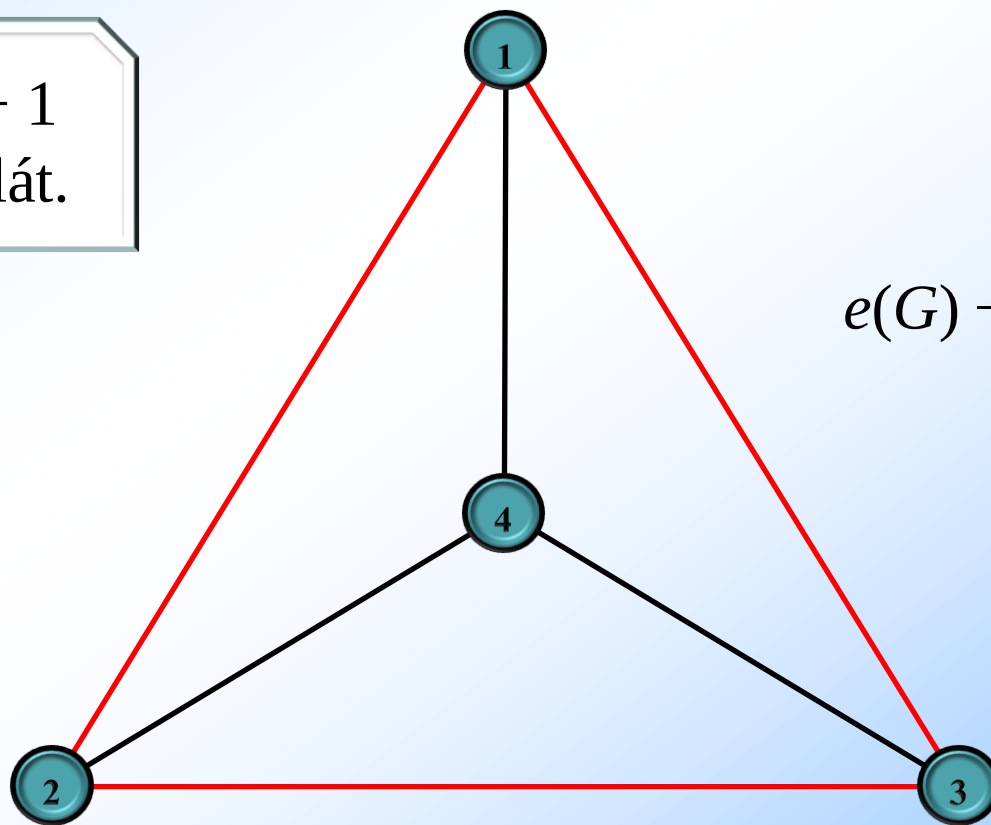
A $T \cup \{ f \}$ alakú részgráfok pontosan egy kört tartalmaznak, tehát ez a rendszer egyértelműen definiált.

Def Ha vesszük az összes K_f alakú kört, akkor

G T -re vonatkozó alapkörrendszeréről beszélünk.

Ész

$e(G) - v(G) + 1$
csak alsó korlát.



$$e(G) - v(G) + 1 = 3,$$

7 kör

Legyen $G = (V, E, \varphi)$ egy gráf, $v, w \in V$ -ben és $V' \subseteq V$.

Ha minden v -ből w -be vezető út tartalmaz V' -beli csúcsot, akkor
 V' elvágja v -t és w -t.

Ha $E' \subseteq E$ és minden v -ből w -be vezető út tartalmaz E' -beli élet, akkor
 E' elvágja v -t és w -t.

Ha V' , illetve E' egy elemű, akkor
elvágó (szeparáló) pontról, ill. elvágó (szeparáló) élről beszélünk.

$E' \subseteq E$ elvágó (szeparáló) élhalmaz, ha a $G' = (V, E \setminus E')$ több komponensből áll, mint G . (Azaz vannak olyan csúcsok G -ben, amelyeket E' elvág.)

$E' \subseteq E$ vágás, ha elvágó élhalmaz, de semelyik valódi részhalmaza nem az.

Tétel(vágások száma)

Egy véges összefüggő $G = (E, V)$ gráfban létezik legalább
 $v(G) - 1$ vágás.

Biz

T feszítőfa összefüggő

$\Rightarrow T_G$ komplementer nem vágás

Ha T_G komplementerhez hozzáveszünk egy e élt T -ből, akkor

elvágó élhalmazt kapunk, amely tartalmaz egy vágást

ez a vágás tartalmazza e élt, de másikat nem T -ből

T -nek $v(G) - 1$ éle van

$\Rightarrow$ legalább ennyi különböző vágást kapunk



Def

Egy körmentes gráfot **erdőnek** nevezünk.

G gráf maximális élszámú körmentes részgráfja G **feszítő erdője**.

Ész

A feszítő erdő minden összefüggő komponense G megfelelő komponensének feszítőfája.

The number of edges of a finite forest is: $v(G) - c(G)$ where c is the number of components.

Def

G **rangja** $r(G) = v(G) - c(G)$,

G **nullitása** $n(G) = e(G) - v(G) + c(G)$.